1 Fonctions

1. Limites d'une fonction

Dans la suite, on désigne par f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$. C est la courbe représentative de la fonction f.

Définitions

Limites en $+\infty$ et $-\infty$

> **Définitions**
>
> (i) On dit que $f(x)$ tend vers l ($l \in \mathbb{R}$) lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
>
> (ii) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle du type $\left[A\ ;\ +\infty\right[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définit de la même manière $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ lorsque $l = \pm\infty$ ou $l \in \mathbb{R}$.

Limites en un point

> **Définition**
>
> On dit que $f(x)$ tend vers l ($l = \pm\infty$ où $l \in \mathbb{R}$) lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ quand tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de a et on note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Applications: limites de référence

- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

  Et de manière générale on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

  Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et de manière générale, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

  Et aussi : $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{a} = \sqrt{a}$, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$, $\lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$.

Enfin, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

- En complément, on a les limites suivantes avec la fonction exponentielle :

  (i) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, et de manière générale pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

  (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, et de manière générale pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = 0$.

  (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Remarque

Pour (ii), on dit « qu'à l'infini la fonction exponentielle l'emporte sur les puissances ».

Interprétations graphiques des limites

Définitions

(i) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à C. On définit de même l'asymptote horizontale en $+\infty$.

(ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale en a à C.

Remarque

Le mot asymptote provient du grec « symptôsis » qui signifie « rencontre ».

Opérations sur les limites

Dans la suite « FI » veut dire Forme Indéterminée : on ne peut conclure de façon générale et il faut étudier les limites au cas par cas.

Limite de la somme $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Limite du produit $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l,\ l>0$	$l,\ l<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l',\ l'>0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l',\ l'<0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Limite du produit $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l',\ l'\neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	FI	FI
$-\infty$	0	FI	FI
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Théorèmes d'encadrement, comparaison et de composition

Tout d'abord, voici le théorème d'encadrement dit aussi le théorème « des gendarmes » :

Théorème

Soit $l \in \mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si pour x assez voisin de a, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Ensuite, voici le théorème de comparaison

Théorèmes

Soit $l \in \mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

(i) Si pour x assez voisin de a, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

(ii) Si pour x assez voisin de a, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Et enfin, le théorème de composition :

Théorème

Soit a, b, c des réels.

Si on a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

2. Continuité

Définitions

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a.

(i) On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$.

(ii) On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point a de I.

Remarque

Dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (sans lever le crayon) sur I.

Propriétés

Propriétés

(i) Une fonction dérivable en un réel a est continue en a.

(ii) Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Par conséquent, les fonctions usuelles (carré, cube, racine carrée, inverse, exponentielle), fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Histoire des maths

C'est à Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) à qui l'on doit la notion de continuité. Mathématicien français, son œuvre est fondamental, tant en analyse qu'en algèbre. Il publie un cours de référence en analyse qui met en avant la rigueur mathématique. Son nom est inscrit sur la Tour Eiffel et a été donné à un cratère de la lune.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a, b \in I$ tels que $a < b$. Pour tout réel k compris $f(a)$ entre $f(b)$ et il existe (au moins) un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque

Autrement dit : la fonction f prend, entre a et b toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. C'est-à-dire que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$. Pour tout réel k compris $f(a)$ entre $f(b)$ et il existe un unique réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque

Ce corollaire est parfois appelé « théorème de la bijection » puisqu'avec ces hypothèses, on dit que f réalise une bijection de $\left[a\ ;\ b\right]$ sur $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$ ou sur $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$. Il est très utile, lors d'étude de fonction, pour en déterminer le signe.

Fonction réciproque

Propriété et définition

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors, f possède une fonction réciproque que l'on note f^{-1} et l'on a pour tout $x \in I$, $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(x)) = x$.

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors, f et f^{-1} ont le même sens de variation sur I.

3. Dérivation

Compléments sur les dérivées

Soit f, u deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Et, soit a, b deux réels.

Fonction	Dérivée
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$
$x \mapsto u^2(x)$	$x \mapsto 2uu'(x)$
$x \mapsto e^{u(x)}$	$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

Définition

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est-à-dire que $(f')' = f''$ (la dérivée de la dérivée f').

Convexité

Définitions

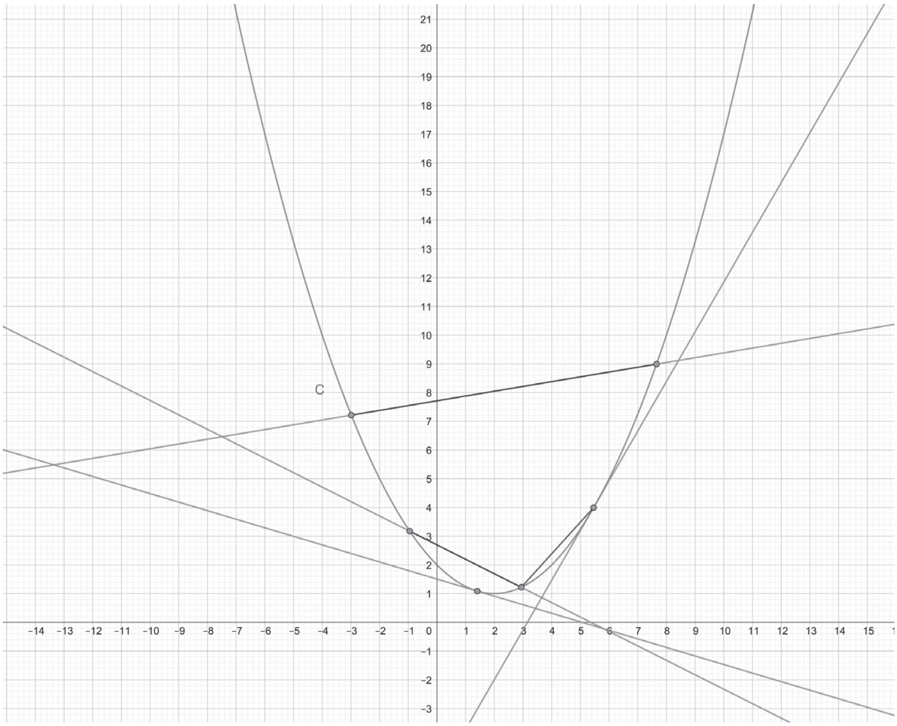
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on appelle C son graphe.

(i) On dit que f est convexe (respectivement concave) sur I si, quelles que soient des sécantes à C, les points d'intersection de ces dernières à C forment des segments situés au-dessus (respectivement en dessous) de C.

(ii) On dit que f est convexe (respectivement concave) sur I si C est entièrement située au-dessus (respectivement en dessous) de chacune de ses tangentes sur I.

Remarque

La 1re définition fait le lien entre C et des sécantes et la 2de entre C et la position de ses tangentes.



Courbe d'une fonction convexe

Remarque

L'étude de la convexité apporte des indications sur la façon de croître ou de décroître d'une fonction. Ainsi, une fonction croissante convexe « croît de plus en plus », comme la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$. Au contraire, une fonction croissante concave croît « de moins en moins », comme la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

f est convexe (respectivement concave) sur I si, et seulement si sa dérivée f' est croissante (respectivement décroissante) sur I.

Corollaire

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

Si pour tout $x \in I, f''(x) \geq 0$ (respectivement $f''(x) \leq 0$) alors la fonction f est convexe (respectivement concave) sur I.

Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on appelle C son graphe.

On dit que C présente un point d'inflexion si elle traverse sa tangente en ce point.

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.

(ii) Si la dérivée f' change de sens de variation en a, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

(iii) Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.