Cours

1 Loi uniforme

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète lorsqu'elle prend ses valeurs dans $\{1,\ldots,n\}$ avec des probabilités élémentaires identiques :

pour tout $k=1,\ldots,n,\ P(X=k)=\frac{1}{n}$.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$. Alors, on a :

(i) $E(X)=\frac{n+1}{2}$,

(ii) $V(X)=\frac{n^2-1}{12}$.

Vocabulaire à connaître

Loi uniforme.

2 Loi de Bernoulli

Définitions

(i) Soit $p\in]0\ ;1[$. Une épreuve de Bernoulli est une épreuve admettant deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S dont la probabilité est p,
- l'autre appelée « échec » notée $\overline{S}$ dont la probabilité est $1-p$.

p est appelé « paramètre de Bernoulli ».

(ii) Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 avec la probabilité p si S est réalisé et la valeur 0 avec la probabilité $1-p$ sinon. La loi de X est appelée loi de Bernoulli et est donnée par le tableau suivant :

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

Propriétés

Soit $p \in]0\,;1[$ et X la variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Alors, on a :

(i) $E(X) = p$,

(ii) $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Vocabulaire à connaître

Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.

Un peu d'histoire des maths

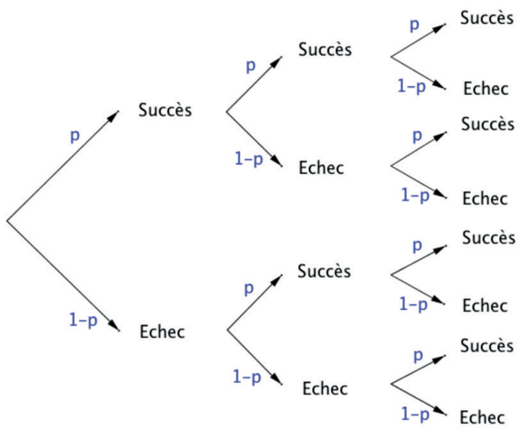
Jacques Bernoulli (1654-1705) le 1er d'une lignée de mathématicien suisse d'origine anversoise. Sur les conseils de son père, il étudie d'abord la théologie mais il se tourne rapidement vers l'astronomie, les mathématiques et la physique. Il voyage en France, en Angleterre et dans les Flandres pour rencontrer les scientifiques de renom. À son retour en Suisse en 1687, il devient professeur à l'université de Bâle, où il demeurera jusqu'à sa mort ; de cette époque datent ses principaux travaux. Le grand mérite de Jacques Bernoulli est de développer le calcul infinitésimal et de l'adapter à de nombreuses situations, en particulier à l'étude des courbes. L'intérêt que porte Jacques Bernoulli au calcul des probabilités l'amène à s'interroger sur les notions de probabilité « géométrique » *a priori* donnée pour des raisons de symétrie du problème, et de probabilité *a posteriori* constatée par la fréquence d'apparitions.

3 Loi binomiale

Schéma de Bernoulli

a. On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

b. Un schéma de Bernoulli peut se représenter à l'aide d'un arbre pondéré. Prenons un schéma de Bernoulli d'ordre 3 où la probabilité du succès est p, où $p \in]0\,;1[$.



Remarque

Attention, dès que l'on dépasse 4 répétitions cela devient compliqué à construire.

Dans l'arbre précédent, on peut se poser la question suivante :

Combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 répétitions ?

On remarque qu'il existe 3 chemins : Succès-Succès-Échec ; Succès-Échec-Succès ; Échec-Succès-Succès.

On notera : $\binom{3}{2} = 3.$

On en arrive donc à la définition des coefficients binomiaux :

Coefficient binomial

Soit un schéma de Bernoulli d'ordre n $(n \geq 1)$, représenté par un arbre.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ (on lit « k parmi n ») le nombre de chemins réalisant k succès lors de n répétitions. On l'appelle coefficient binomial de k parmi n.

Propriétés

(i) Pour tout entier $n \geq 1$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

(ii) *Propriété de symétrie* Pour tous entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

(iii) *Formule de Pascal* Pour tous entiers n et k

tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

Conséquence – Le triangle de Pascal

Si on place les coefficients binomiaux dans un tableau avec les n en ligne et les k en colonne, on obtient un triangle et la formule (iii) permet de calculer les coefficients de la ligne $n+1$ connaissant ceux de la ligne n. On a donc une formule de récurrence pour calculer les coefficients binomiaux et on peut tous les calculer de proche en proche.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=0$	$\binom{0}{0}=1$				
$n=1$	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$			
$n=2$	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$		
$n=3$	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$	
$n=4$	$\binom{4}{0}=1$	$\binom{4}{1}=4$	$\binom{4}{2}=6$	$\binom{4}{3}=4$	$\binom{4}{4}=1$

On a par exemple $\binom{4}{1}=\binom{3}{0}+\binom{3}{1}=1+3=4$.

On peut observer que pour tout $n\geq 1$, $\binom{n}{1}=n$.

Un peu d'histoire des maths

Blaise Pascal (1623-1662), célèbre mathématicien, physicien, philosophe et théologien français, fit la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui « triangle de Pascal ». Son but était d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des Perses mais aussi du mathématicien chinois Zhu Shi Jie (XII^{e} siècle). Il fut l'inventeur de la célèbre « Pascaline », une ingénieuse machine à calculer pour l'époque ! Par ailleurs, on lui doit le début de la mathématisation des probabilités.

Variable aléatoire suivant une loi binomiale

Soit un schéma de Bernoulli d'ordre n $(n\geq 1)$ où la probabilité du succès est p, où $p\in]0\ ;1[$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Pour tout entier k, $0\leq k\leq n$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. On note $X\sim B(n\ ;p)$.

Propriétés

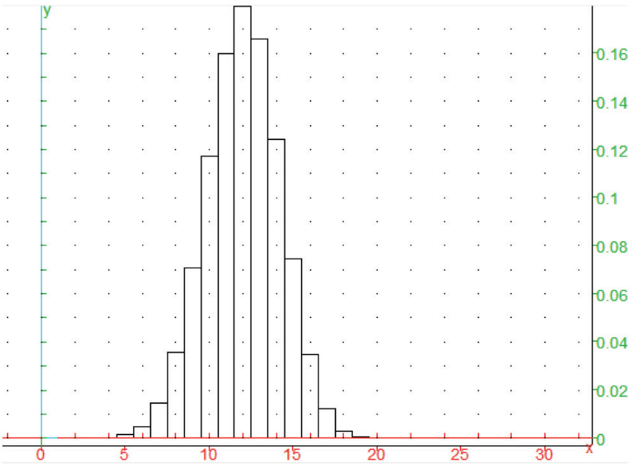
Soit $X \sim B(n\ ;\ p)$. On a :

(i) $E(X) = np$,

(ii) $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Représentation graphique

Prenons $X \sim B(20\ ;\ 0{,}6)$. On obtient la représentation graphique suivante de la loi de X :



Les valeurs de X les plus probables sont situées autour de l'espérance de X (ici 12). On remarque que pour des valeurs éloignées de *E(X),* la probabilité que X prenne ces valeurs est très faible.

Vocabulaire à connaître

Schéma de Bernoulli, triangle de Pascal, loi binomiale.

4 Loi géométrique

Définition

Soit $p \in]0\ ;\ 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$.

On note $X \sim G(p)$.

Remarque

La loi géométrique s'emploie dans le cas d'un schéma de Bernoulli où la probabilité du succès est p. Si $X \sim G(p)$, X est égale au rang d'apparition du 1^er^ succès. On dit aussi que X est le temps d'attente du 1^er^ succès.

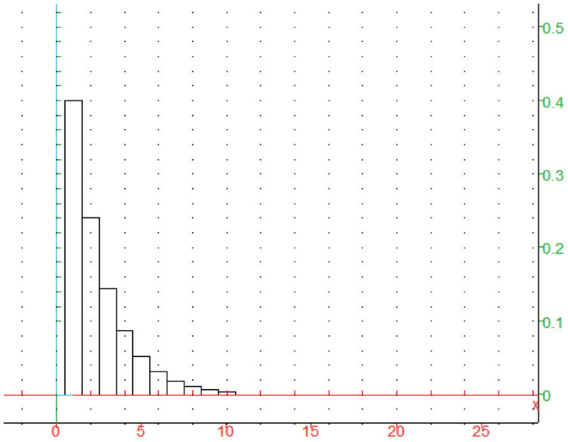
Propriétés

Soit $X \sim G(p)$, alors on a :

(i) $E(X) = \dfrac{1}{p}$, (ii) $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Représentation graphique

Soit $X \sim G(0,4)$. On obtient la représentation graphique suivante de la loi de X :



Propriété caractéristique

Soit X une variable aléatoire. Si X suit une loi géométrique, alors X est « sans mémoire », à savoir : pour tout $k,\ l \in \mathbb{N}^*$, $P_{(X>k)}(X > k + l) = P(X > l)$.

Vocabulaire à connaître

Loi géométrique, « sans mémoire ».

Exercices

Compétence attendue

- Identifier des situations où une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, une loi binomiale ou une loi géométrique.

Exercice 6.1

Chercher, calculer, communiquer un résultat par écrit

Une entreprise fabrique des ampoules. On sait que 5 % des ampoules produites présentent un défaut. On choisit au hasard une ampoule. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'ampoule ne présente pas de défaut et 0 sinon.

1. Identifier la loi de X et en donner son paramètre.
2. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 6.2

Chercher, calculer, communiquer un résultat par écrit

Soit une pièce de monnaie truquée de telle façon que la probabilité d'obtenir pile soit de 0,3. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de lancers jusqu'à l'obtention de pile.

1. Identifier la loi de Y et en donner son paramètre.
2. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 6.3

Chercher, calculer, communiquer un résultat par écrit

Un QCM comporte 10 questions avec 5 réponses possibles dont une seule est exacte. Enzo répond au hasard à toutes les questions.
Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses au QCM.

1. Identifier la loi de Z et en donner ses paramètres.
2. En moyenne, que peut espérer Enzo d'avoir comme bonnes réponses ?

Compétence attendue

- Déterminer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal.

Exercice 6.4

Chercher, raisonner, calculer

À l'aide du triangle de Pascal ci-dessous, déterminer la valeur de $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$ et $\binom{5}{5}$.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$n = 0$	$\binom{0}{0} = 1$				
$n = 1$	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$			
$n = 2$	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$		
$n = 3$	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$	
$n = 4$	$\binom{4}{0} = 1$	$\binom{4}{1} = 4$	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{4}{4} = 1$

Compétence attendue

- Dans le cas où X suit une loi binomiale, calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, les probabilités des événements de type $P(X = k)$ ou $P(X < k)$, etc. Calculer explicitement ces probabilités pour une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

Exercice 6.5

Raisonner, calculer, expérimenter à l'aide de logiciels, communiquer un résultat par écrit

On jette un dé équilibré à 6 faces huit fois de suite.

On note « $X = k$ » l'événement « on a obtenu k fois le n° 4 » et « $X \leq k$ » l'événement « on a obtenu au plus k fois le n° 4 ».

Exercices