Vous allez découvrir dans ce document comment obtenir à partir d'une expression du type $ax^2 + bx + c$ *une forme appelée forme canonique qui peut se factoriser facilement dans l'optique de résoudre des équations* $ax^2 + bx + c = 0$ *dites du 2nd degré.*

Exemple introductif

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$ appelée fonction du 2nd degré ou polynôme du 2nd degré.

1re étape Tout d'abord, on factorise par le coefficient devant x^2 (c'est-à-dire 2), soit : $f(x) = 2(x^2 + 6x + 5)$.

2ème étape Au sein des parenthèses, on reconnaît le début du développement d'une identité remarquable concernant $x^2 + 6x$. En effet, $x^2 + 6x = x^2 + 2 \times x \times 3$ est le début du développement de $(x+3)^2$. On a $\boldsymbol{(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9}$ donc $\boldsymbol{x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9}$.

On peut donc remplacer dans les parenthèses :

$f(x) = 2\left((x+3)^2 - 9 + 5\right) = 2((x+3)^2 - 4) = 2(x+3)^2 - 8$.

L'expression finale obtenue de $f(x)$ est appelée la forme canonique de $f(x)$.

Remarque Si vous éprouvez des difficultés pour l'étape 2, on pourra retenir l'identité suivante :

Pour tous réels x et p, on a $x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Application directe

Résolvons l'équation $f(x) = 0$. Si on utilise directement la forme développée $2x^2 + 12x + 10$, on n'obtient pas satisfaction pour factoriser… Il faut donc passer par la forme canonique :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+3)^2 - 8 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{on\ divise\ par\ 2} (x+3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+3-2)(x+3+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 0 \quad ; \quad S = \{-5\ ;\ -1\}$$

Définition - Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ une fonction du 2nd degré. Alors, on a $\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$.

Cette dernière expression est appelée la **forme canonique** de $f(x)$ et on a $\boldsymbol{\alpha = -\frac{b}{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta = f(\alpha)}$.

Remarque Lorsqu'on vous demande de donner la forme canonique d'une fonction du 2nd degré, on peut utiliser directement la propriété précédente (en appliquant « simplement » deux formules) ou utiliser la méthode de l'introduction.

Exemple

Soit $f(x) = x^2 - x + 1$.

Alors, $a = 1, b = -1$ et $c = 1$. Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Donc $f(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{3}{4}$. La forme canonique de $f(x)$ est donc :

$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Exercice

Déterminer la forme canonique des expressions suivantes **en utilisant la méthode de l'introduction**.

1. $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$
2. $f(x) = 2x^2 - x + 1$
3. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
4. $f(x) = 2x^2 - x - 15$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
6. $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 - 2x - 5$
7. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 3$
8. $f(x) = 3x^2 - x + \frac{5}{12}$

Solutions

1. $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$
2. $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$
3. $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$
4. $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{121}{8}$
5. $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$
6. $f(x) = -\frac{1}{5}(x+5)^2$
7. $f(x) = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$
8. $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}$