VARIATIONS ET FONCTIONS DE REFERENCE

2^de^

I Sens de variations et extremums d'une fonction

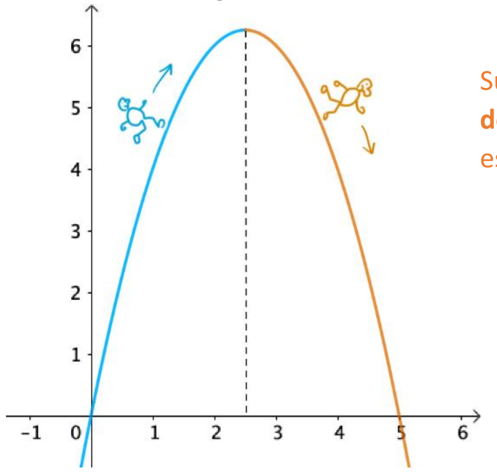
Dans toute la suite de cette partie, on notera $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1.1 Sens de variations d'une fonction

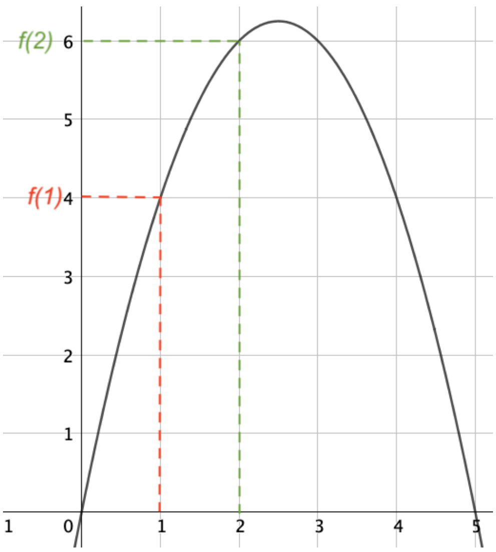
On a représenté ci-dessous dans un repère la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = 5x - x^2$.

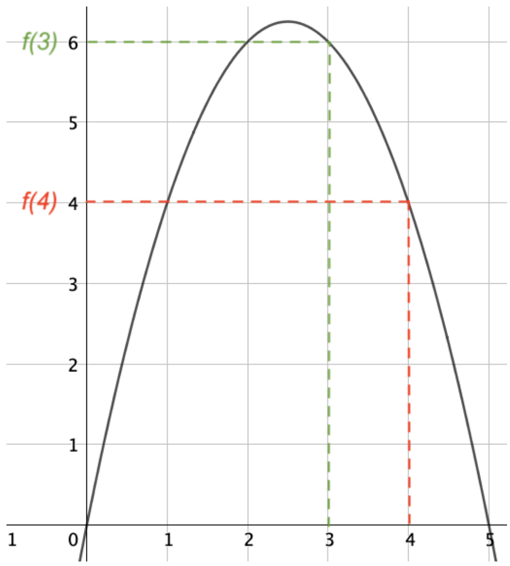
Lorsqu'on se promène sur la courbe en allant de la gauche vers la droite :

Sur l'intervalle $[0\,;\ 2{,}5]$, on **monte**, on dit que la fonction est **croissante**.



Sur l'intervalle $[2{,}5\,;\ 5]$, on **descend**, on dit que la fonction est **décroissante**.

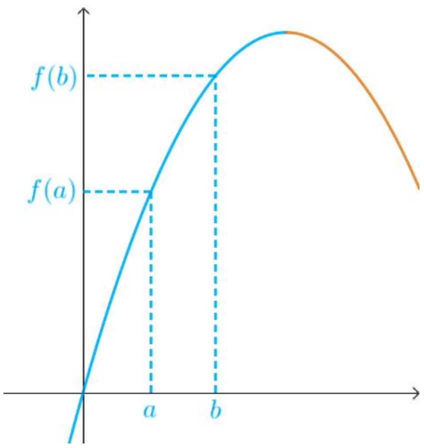




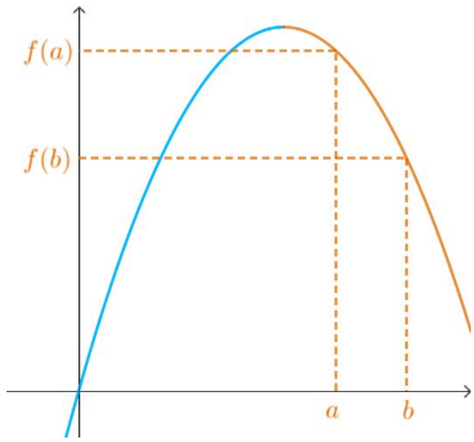
Passons aux définitions mathématiques de la croissance et de la décroissance d'une fonction f :

Définitions *Sens de variations*

Cas où f est croissante



Cas où f est décroissante



Remarques

Ces résultats peuvent se résumer dans un tableau appelé **tableau de variations**, qui est une forme « stylisée » de représentation où l'on indique que la fonction est croissante par une flèche qui monte et que la fonction est décroissante par une flèche qui descend.
Dans la 1re ligne, on indique les valeurs importantes de x et dans la 2de les variations de la fonction ainsi que les images correspondant aux réels de la 1re ligne (valeurs exactes).

Exemple
Reprenons l'exemple précédent de la fonction $f(x) = 5x - x^2$
On obtient le tableau de variations suivant sur l'intervalle $[-2 ; 2]$:

1.2 <u>Extremums d'une fonction</u>

Les extremums d'une fonction f, s'ils existent, sont les valeurs maximale et minimale qui sont <u>atteintes</u> par la fonction f sur un intervalle donné. Plus précisément, on a la définition suivante :

Définitions

Exemple

Exercice 1

Soit une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

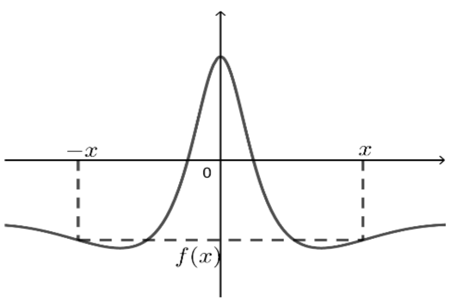
x	-2		0		2		5
f	0	↗	4	↘	-2	↗	-1

1. Donner l'ensemble de définition de f et dessiner deux courbes représentatives possibles.
2. Répondre par vrai ou par faux, justifier.
   a. $f(3) \leq f(4)$.
   b. $f(1) = 2$.
   c. $f(1) \geq f(4)$.
   d. $f(-1) > f(3)$.
3. Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [0; 2]$.
4. Déterminer les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.

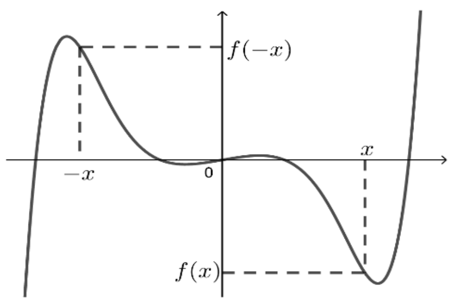
II Fonctions paires et impaires

Définitions

Propriétés



Fonction paire
Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées



Fonction impaire
Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère

Exemples

Remarques
1) Au préalable, visualiser la courbe de la fonction à l'aide de la calculatrice à étudier pour constater des symétries éventuelles.
2) Pour montrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, le faire sur un contre-exemple, c'est-à-dire prendre un nombre a de telle façon que la relation (ii) n'est pas vérifiée dans les deux cas :

3) Etudier la « parité » d'une fonction revient à dire si la fonction est paire ou impaire ou ni paire, ni impaire.

III <u>Fonction affine</u>

On rappelle qu'une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$ et sa représentation graphique, dans un repère, est la droite d'équation $y = ax + b$ où a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.
Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine lorsque $b = 0$: soit une fonction de la forme $g(x) = ax$ et sa représentation graphique, dans un repère, est une droite passant par l'origine.

Propriété des accroissements

Démonstration

Remarque
On peut inverser m et n dans la formule, cela n'a pas d'importance.
En effet : $\frac{f(n)-f(m)}{n-m} = \frac{-(f(m)-f(n))}{-(m-n)} = \frac{f(m)-f(n)}{m-n} = a.$

Exemple
Déterminer par calcul une expression de la fonction f telle que : $f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$.

Remarque
Il y a une 2e méthode pour déterminer l'expression de $f(x)$. L'idée est de mettre en place ce qu'on appelle un système de 2 équations à 2 inconnues (a et b). *La résolution sera vue dans un chapitre ultérieur.*

Propriétés

Démonstration en exercice

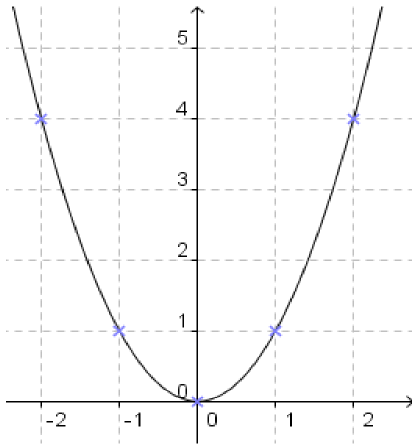
Exemples

III Fonctions de référence et variations

3.1 Fonction carré et fonction cube

Définitions *Fonction carré*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



Remarques

Propriété

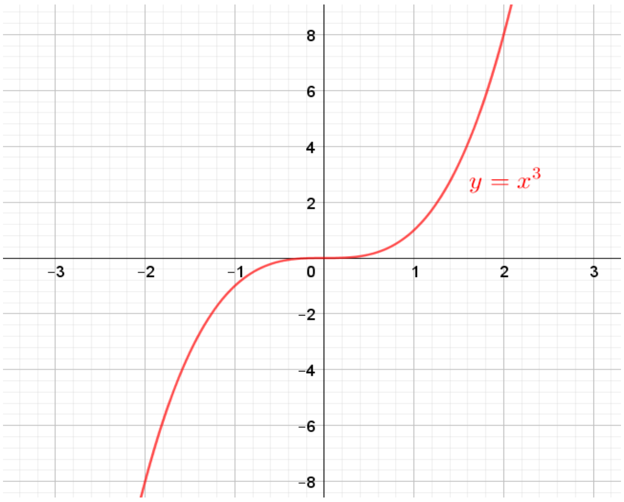
Démonstration **exemplaire**

Tableau de variations de la fonction carré

Exemples

Définitions *Fonction cube*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



Remarques

Propriété

Exemple

Propriété

Démonstration admise

Tableau de variations de la fonction cube

Exemples

Position relative des courbes des fonctions de référence

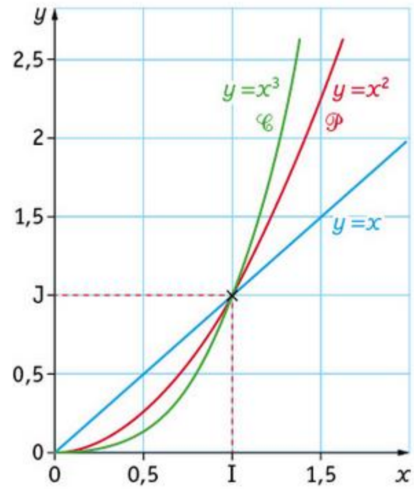
Propriétés

Démonstration exemplaire

Remarque

Ces propriétés se traduisent graphiquement par le fait que :

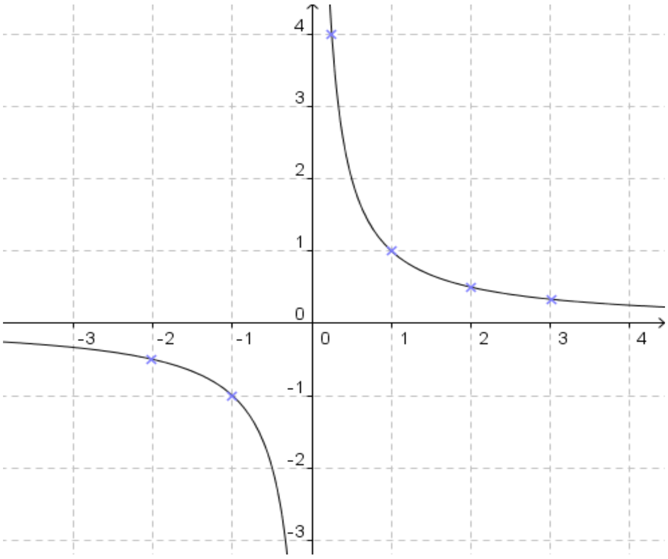
- Sur l'intervalle $[0; 1]$, la cubique est « en-dessous » de la parabole qui elle-même est « en-dessous » de la droite d'équation $y = x$.
- Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la droite d'équation $y = x$ est « en-dessous » de la parabole qui elle-même est « en-dessous » de la cubique.



3.2 Fonction inverse et fonction racine carrée

Définitions *Fonction inverse*

x	−2	−1	0,25	1	2	3
f(*x*)						



Remarques

Propriétés

Exemple

Propriétés

Remarque
Attention à ne pas dire que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. En effet, $-1 \leq 2$ et l'inverse de -1 n'est pas supérieur à l'inverse de 2… Et à ne pas confondre inverse et opposé !

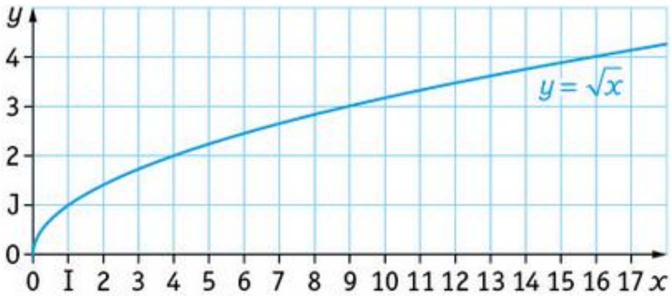
Démonstration ***exemplaire***

Tableau de variations de la fonction inverse

Exemples

Définitions *Fonction racine carrée*

x	0	1	4	9	16
$f(x)$					



Remarques

Propriétés

Exemple

Propriété

Démonstration **« exemplaire »**

Tableau de variations de la fonction racine carrée

Exemples

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x^3 + 5}$.

1. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit a et b deux nombres appartenant $\mathbb{R}^+$ tels que $a < b$, comparer $\sqrt{a^3 + 5}$ et $\sqrt{b^3 + 5}$ en commençant par a^3 et b^3.

3. En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}^+$.