Exercice 1

1. On considère une fonction f définie sur $[-5\ ;\ 6]$, dont on donne le tableau de variations suivant :

x	-5		-1		3		6
$f(x)$	8	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-4

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse.

a. Pour tout réel $x \in [-5\ ;\ -1], 2 \leq f(x) \leq 8$.
b. Pour tout réel $x \in [-5\ ;\ 3], 2 \leq f(x) \leq 8$.
c. Pour tout réel $x \in [3\ ;\ 6], 5 \leq f(x) \leq -4$.
d. Pour $-5 \leq x \leq 3, f$ admet un minimum qui est -4 atteint en 6.

2. On considère une fonction f définie sur $[-2\ ;\ 12]$, dont on donne le tableau de variations suivant :

x	-2		1		3		6		12
$f(x)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-4

a. Comparer, si possible les nombres suivants :

* $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ et $f(0)$ * $f(-1)$ et $f(3)$ * $f(2)$ et $f(\pi)$ * $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{5}{2}\right)$

b. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution ? Si oui, sur quel intervalle est situé la solution.
c. Peut-on affirmer que pour $x \in [3\ ;\ 6], -4 \leq f(x) \leq 5$? Pourquoi ?
d. Déterminer un encadrement des nombres suivants :

* $f(-\frac{1}{2})$ * $f(\pi - 1)$ * $f(2\pi)$ * $f(3\sqrt{3} - 3)$

Exercice 2

On considère une fonction f dont on donne le tableau de variations suivant :

x	-3		1		3		6
variations de f	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Donner le minimum et le maximum de f et préciser pour quelles valeurs ils sont atteints sur :
a. l'intervalle $[-3\ ; 6]$,
b. l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.
3. Compléter avec $\leq, \geq$ ou ? si les informations dont on dispose ne permettent pas de conclure.
a. $f(-3) \ldots f(-1)$
b. $f(-2) \ldots f(2)$
c. $f(-2) \ldots f(5)$
d. $f(1) \ldots f(2)$
e. $f(4) \ldots f(\pi)$

Exercice 3

1. Etudier la parité des deux fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{2x^2}{1+x^6}$ $g(x) = x^3 - 6x + 1$

2. **a.** Compléter le tableau ci-dessous sachant que h est une fonction impaire.

$\boldsymbol{x}$	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{h(x)}$		-1	0		14

b. Déterminer a sachant que pour tout x réel $h(x) = ax^3 - x$.

Exercice 4

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 1$$

a. Montrer que $f(x) - 2 = -(x+1)^2$.

b. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a. Montrer que $g(x) - \frac{1}{2} = -\frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}$.

b. En déduire que g admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

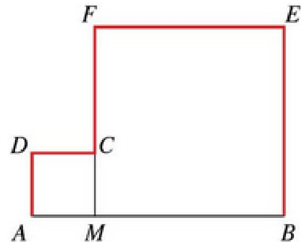
c. Montrer que g est impaire et en déduire que g admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1. Soit f la fonction affine telle que $f(0) = -1$ et $f(-1) = -3$. Déterminer l'expression de $f(x)$. Puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction affine telle que $g(1) = 2$ et $g(-2) = 3$. Déterminer l'expression de $g(x)$. Puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *Prise d'initiative*



Sur le segment [AB] de longueur 10, on place un point M. On note x la longueur AM.
AMCD et MBEF sont des carrés.
Quel est le sens de variations de la fonction f qui au nombre x de l'intervalle $[0\,;10]$ associe la longueur de la ligne polygonale ADCFEB ?

Exercice 7 *Fonction carré*

1. **a.** Compléter le tableau de valeurs suivant où $f(x) = x^2$.

$\boldsymbol{x}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{f(x)}$									

b. Tracer un repère orthogonal $(O\,; I, J)$ tel que 1 cm (ou 1 carreau) sur l'axe des abscisses représente 1 unité et 1 cm (ou 1 carreau) sur l'axe des ordonnées 2 unités (uniquement les valeurs positives serviront !) puis tracer la courbe de la fonction carré.

c. Dans le repère précédent, tracer la droite d'équation $y = 4$. Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 4$ puis $x^2 > 4$ et $x^2 \leq 4$.

d. Pour chacun des cas, déterminer l'encadrement de x^2 le plus précis à l'aide de la courbe de la question **2.b.** : $2 \leq x \leq 3\,; 0 < x \leq 4\,; -2 \leq x \leq 1\,; -4 < x < 3$.

e. Déterminer l'ensemble solution des inéquations suivantes à l'aide de la courbe de la question **2.b.** : $0 \leq x^2 \leq 4\,; 4 < x^2 \leq 16\,; -9 \leq x^2 \leq -4$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (par le calcul) :
a. $x^2 - 1 = -3x^2 + 8$; **b.** $(3x-2)^2 + 12x = 40$; **c.** $4x^2 + 7 \leq \frac{3}{4}$.

Exercice 8 *Fonction inverse*

1. **a.** Compléter le tableau de valeurs suivant où $f(x) = \frac{1}{x}$.

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4
$f(x)$										

b. Tracer un repère orthogonal $(O\,;I,J)$ tel que 2 cm (ou 2 carreaux) sur l'axe des abscisses représente 1 unité et 2 cm (ou 2 carreaux) sur l'axe des ordonnées 1 unité puis tracer la courbe de la fonction inverse.

c. Dans le repère précédent, tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. Résoudre graphiquement l'équation $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ puis $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

d. Pour chacun des cas, déterminer l'encadrement de $\frac{1}{x}$ le plus précis à l'aide de la courbe de la question **2.b.** : $1 \leq x \leq 4$; $0{,}1 \leq x < 0{,}5$; $-2 \leq x \leq -\frac{1}{4}$.

e. Déterminer l'ensemble solution des inéquations suivantes à l'aide de la courbe de la question **2.b.** : $\frac{1}{x} > 1$; $\frac{1}{x} \leq 4$; $-1 < \frac{1}{x} \leq -0{,}5$ et $\frac{1}{x} \geq -0{,}25$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ (par le calcul) :
a. $\frac{2}{x} = 4$; **b.** $-\frac{3}{x} + \frac{7}{4} = \frac{5}{x} - \frac{1}{2}$; **c.** $11x - \frac{2}{x} + 2 = \frac{8}{x} - 2 + 11x$; **d.** $\left(\frac{1}{x} + 2\right)^2 = \frac{1}{x^2} + 4$.

Exercice 9

1. Pour chacun des cas, déterminer l'encadrement de $\sqrt{x}$: **a.** $0 \leq x \leq 4$; **b.** $9 > x \geq \frac{1}{4}$; **c.** $x \leq 16$; **d.** $1 < x < 9$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: **a.** $2\sqrt{x} - 1 = 9$; **b.** $\left(\sqrt{x} + 2\right)^2 = x + 12$; **c.** $\sqrt{9 + x^2} = 5$;
d. $\sqrt{x} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + 2$; **e.** $0 \leq \sqrt{x} \leq 3$; **f.** $1 < \sqrt{x} \leq 4$; **g.** $\sqrt{x} \leq -\frac{1}{4}$.

Exercice 10

Sans effectuer de calculs *(càd en utilisant les fonctions de référence)*, comparer les nombres suivants :

1. **a.** $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; **b.** $(-0{,}7)^2$ et $(-0{,}082)^2$; **c.** $(\pi - 1)^2$ et 16 ; **d.** $(-2)^2$ et $\left(-\sqrt{2}\right)^2$

2. **a.** $-\frac{1}{2{,}05}$ et $-\frac{1}{1{,}95}$; **b.** $\frac{1}{3}$ et $0{,}5$; **c.** $\frac{1}{-\pi-1}$ et $\frac{1}{-\pi}$; **d.** l'inverse du carré de 2 et l'inverse du carré de $\sqrt{2}$.

3. **a.** $(-4)^3$ et $(-7)^3$; **b.** $\left(\frac{5}{9}\right)^3$ et $\left(\frac{8}{7}\right)^3$; **c.** $3{,}5^3$ et 27.

4. **a.** $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\frac{5}{2}}$; **b.** $\sqrt{\frac{10}{3}}$ et $\sqrt{2{,}7}$; **c.** $\sqrt{50}$ et 7.

Exercice 11

1. Soit la fonction f définie sur $]4\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2x-4}$.
a. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de f sur $]4\,;\,+\infty[$.
b. Soit a et b deux nombres appartenant à $]4\,;\,+\infty[$ tels que $a < b$, comparer $\frac{1}{2a-4}$ et $\frac{1}{2b-4}$ en commençant par $2a - 1$ et $2b - 1$.
c. En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation sur $]4\,;\,+\infty[$.

2. Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;1]$ par $g(x) = (x-1)^2 - 1$.
a. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de g sur $]-\infty\,;1]$.
b. Soit a et b deux nombres appartenant à $]-\infty\,;1]$ tels que $a < b$, comparer $(a-1)^2 - 1$ et $(b-1)^2 - 1$ en commençant par $a - 1$ et $b - 1$

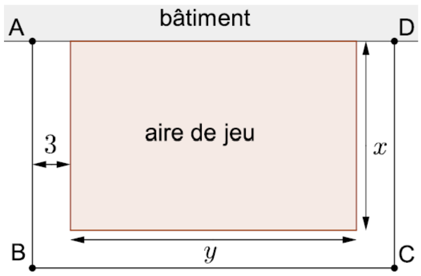
c. En déduire le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation sur $]-\infty\,;1]$.

Exercice 12

On souhaite construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m^2. Celle-ci est entourée par une clôture sur trois côtés d'une allée de 3 m de large. On souhaite de plus que les dimensions de l'aire de jeu soient supérieures ou égales à 10 m.

On recherche les dimensions de l'aire de jeu de façon que la longueur de la clôture soit la plus petite possible.

On nomme x et y les dimensions de l'aire de jeu (voir figure ci-contre). On note L la longueur de la clôture, soit : $L = AB + BC + CD$.



1. Montrer que $L = 2x + 12 + \frac{450}{x}$.

2. Soit f la fonction définie sur [10 ; 45] par : $f(x) = 2x + 12 + \frac{450}{x}$.

a. Conjecturer le sens de variations de la fonction f.

b. Vérifier que $f(x) - 72 = \frac{2(x-15)^2}{x}$.

c. En déduire le minimum de la fonction f ; en quel valeur est-il atteint ? Conclure sur les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la clôture soit minimale ; que vaut alors cette longueur ?

3. **a.** Démontrer que pour tous réels a et b non nuls, $f(a) - f(b) = \frac{2(b-a)(ab-225)}{ab}$.

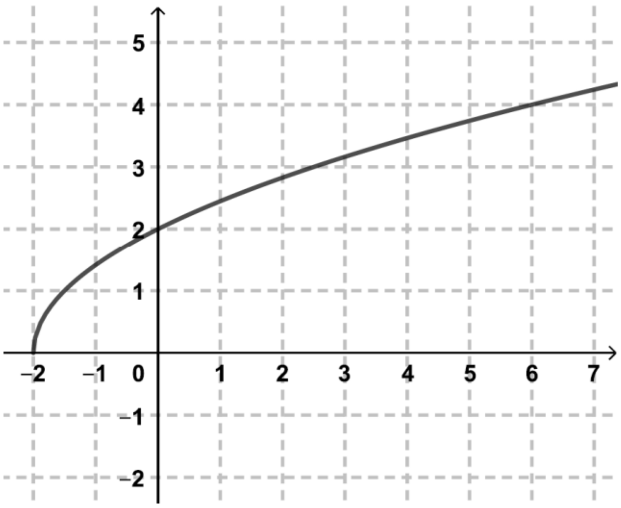
b. Soit a et b appartenant à l'intervalle [10 ; 15] tels que $a < b$, déterminer le signe de $\frac{2(b-a)(ab-225)}{ab}$. Puis en déduire le sens de variation de f sur [10 ; 15].

c. Soit a et b appartenant à l'intervalle [15 ; 45] tels que $a < b$, déterminer le signe de $\frac{2(b-a)(ab-225)}{ab}$. Puis en déduire le sens de variation de f sur [10 ; 15].

d. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 13

On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+4}$.



1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Soit la fonction g définie par $g(x) = x - 2$.
Tracer la représentation graphique de la fonction g ci-dessus.

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x - 2$, puis par le calcul.