<u>Corrigé du DS n°3</u> (12/11/20)

Exercice 1

Partie A : Conjecture

1. $u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}2^2 + 3\times 2 - \frac{3}{2} = -2+6-\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3\times\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{23}{8}$

2. En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$, on obtient :

$u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{383}{128} \approx 2{,}992\,19$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\frac{383}{128}\right) \approx 2{,}999\,97$

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$

$v_n^2 = (u_n-3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\frac{1}{2}v_n^2 = -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = v_{n+1}$

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

- $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$; la propriété est vraie au rang 0.
- Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant v_p \leqslant 0$.
  On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\frac{1}{2}v_p^2$.
  $-1 \leqslant v_p \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_p^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}v_p^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$
  Donc $-1 \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$

3. a. Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$

b. Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.

Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}v_n \leqslant 0$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$; donc $\frac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) est convergente.

5. On note ℓ limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in [-1\,;\,0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

On résout l'équation $x = -\frac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :

$x = -\frac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2+x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

Mais on sait que $\ell \in [-1\,;\,0]$ donc ne peut pas correspondre à $x = -2$.

Donc $\ell = 0$ et la limite de la suite (v_n) est 0.

6. La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est croissante.

La suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est convergente vers 3.

Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

Exercice 2

1. a) $f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1}$.
   b) On a $f'(x) = (1+x)e^{x-1}$.
   Comme sur $\mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$; le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1+x$. On en déduit donc que pour $x > -1, f'(x) > 0$ et pour $x < -1, f'(x) < 0$. Soit f décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$ et f croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

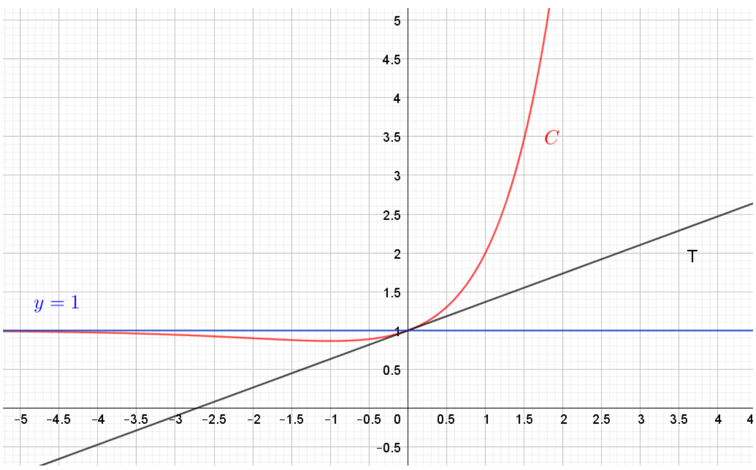
2. a) On a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car par produit $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{x-1}=+\infty$ puisque $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$.
$\lim_{x-\infty} f(x)=1$ car par somme $\lim_{X\to-\infty} 1 \quad =1$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^{x-1}=0$, en effet : $\lim_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ et en posant $X=x-1$ on a $\lim_{X\to-\infty}(X+1)e^{X}=\lim_{X\to-\infty} Xe^{X}+e^{X}=0$ avec $\lim_{X\to-\infty} e^{X}=\lim_{X\to-\infty} Xe^{X}=0$.
b) Comme $\lim_{x-\infty} f(x)=1$, la coure C admet une asymptote horizontale en $-\infty$ qui est la droite d'équation $y=1$.
3. Voici ci-dessous le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	1 ↘	$-e^{-2}+1$	↗ $+\infty$

4. L'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 est donnée par :
$y_T=f'(0)(x-0)+f(0)=e^{-1}x+1$.
Soit T : $y_T=xe^{-1}+1$.
5. a) Tout d'abord, $f(x)-y_T=xe^{x-1}+1-(xe^{-1}+1)=xe^{x-1}-xe^{-1}=x(e^{x-1}-e^{-1})$.
Soit encore $f(x)-y_T=xe^{-1}(e^{x}-1)=\frac{1}{e}x(e^{x}-1)$.
Comme $\frac{1}{e}>0$, le signe de $f(x)-y_T$ dépend du produit $x(e^{x}-1)$. On a $e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.
Etablissons un tableau de signes de $f(x)-y_T$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y_T$		$+$	0	$+$	

On conclut que pour tout $x\in\mathbb{R}, f(x)-y_T\geq 0$.
b) D'après ce qui précède, comme pour tout $x\in\mathbb{R}, f(x)-y_T\geq 0$ on a $f(x)\geq y_T$. C'est-à-dire que la courbe C est au-dessus sur $\mathbb{R}$.
6.



Exercice 3

1. a) 2. b) 3. c) 4. b) 5. a)