**Convexité, continuité et géométrie dans l'espace**

**15/12/20**

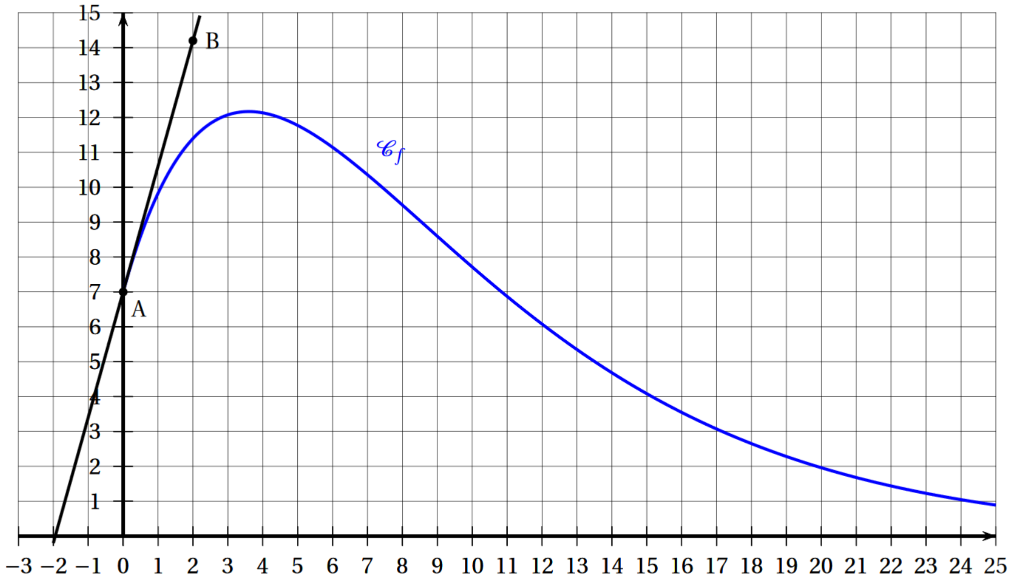
*Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.*

## Exercice 1

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ définie sur $[0 ; 25]$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,2x}$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
On a représenté également sa tangente $T$ au point $A(0; 7)$. $T$ passe par le point $B(2; 14,2)$.




1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. a) Déterminer graphiquement la valeur de l'image de $f$ en 0, $f(0)$.
   b) Déterminer par le calcul la valeur du nombre dérivé de $f$ en 0, $f'(0)$.
3. En déduire a et b.
4. Soit $f(x) = (5x+7)e^{-0,2x}$, la fonction définie sur $[0 ; 25]$.
   a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f$.
   b) Déterminer le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[0 ; 25]$.
   c) Démontrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle [3,6 ; 25]. Donner un encadrement au centième $\alpha$.
5. a) Calculer la fonction dérivée seconde de $f$, $f''(x)$.
   b) Etudier la convexité de la fonction $f$ sur $[0 ; 25]$. Préciser si la courbe possède des points d'inflexion.

## Exercice 2

***Les questions 1. et 2. sont indépendantes.***

1. Soit $f$ la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a^2x + 3 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ x + 3a \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de $a$ pour que $f$ soit continue sur [0 ; 2].

2. Soit une fonction *f* définie et dérivable sur ℝ. On note *C* sa courbe représentative. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction *f* sur ℝ.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-2$ |

a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur ℝ.

b) Dresser le tableau de signes de la fonction *f*.

c) *C* admet-elle une asymptote ? Si oui, préciser.

d) On note *g* la fonction définie sur ℝ par $g(x) = e^{f(x)}$.

i) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

ii) Calculer la fonction dérivée de la fonction *g*.

iii) Déterminer le sens de variations de la fonction *g*.

## Exercice 3

Soit la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$ et $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Etudier la fonction $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
3. a) Justifier que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $l$.

   b) Déterminer en justifiant clairement la valeur de $l$.

## Exercice 4 - Bonus

On considère quatre points distincts A, B, C et D dans l'espace. On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. On considère un point G de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

1. a) Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

   b) En déduire que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$.

   c) Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que G est le milieu de [IJ].

**<u>Barème probable</u> /25 Ex 1 : 9 Ex 2 : 9 Ex 3 : 7 Ex 4 (Bonus) : 4**