Corrigé du DS 3 du 29/01/21

Exercice 1

1. a divise b ssi il existe un entier relatif k tel que $b = k \times a$.

2. a) Si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors pour tous m, n appartenant à $\mathbb{Z}$, $c \mid ma + nb$

   b) Si a divise b et b divise c alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'b$.
   Donc $c = k'ka$ et donc il existe un entier relatif $l = kk'$ tel que $c = la$.
   Donc a divise c.

Exercice 2

1. a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   b) Supposons que 3 divise $(a+b)^3$ alors il existe un entier relatif k tel que $(a+b)^3 = 3k$.
   Alors, on a : $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = 3k - 3a^2b - 3ab^2 = 3(k - a^2b - ab^2)$ et $k - a^2b - ab^2$ est un entier relatif donc 3 divise : $a^3 + b^3$.
   Réciproquement, que 3 divise $a^3 + b^3$ alors il existe un entier relatif k tel que $a^3 + b^3 = 3k$.
   Alors, on a : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 3k + 3a^2b + 3ab^2 = 3(k + a^2b + ab^2)$ et $k + a^2b + ab^2$ est un entier relatif donc 3 divise : $(a+b)^3$.
   Finalement, l'équivalence est bien montrée.
2. $4x^2 - y^2 = 20 \Leftrightarrow (2x-y)(2x+y) = 20$. Les diviseurs positifs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20.
   Comme x et y dont deux entiers positifs, alors $2x + y > 2x - y$.
   On a les systèmes suivants : $\begin{cases} 2x+y=20 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{19}{2} \notin \mathbb{N}$; $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 2x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases}$;
   $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Donc le couple (3 ; 4) est solution de l'équation.

Exercice 3

1. On a $a_0 = 3^3 - 26 \times 0 - 27 = 0 = 0 \times 169$, $a_1 = 3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \times 169$ et $a_2 = 3^9 - 26 \times 2 - 27 = 19\,604 = 116 \times 169$ donc ces trois entiers sont tous divisibles par 169.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, en remarquant que $27 = 3^3$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 27a_n &= 3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 - 3^3(3^{3n+3} - 26n - 27) \\ &= 3^{3n+6} - 26n - 53 - 3^{3n+6} + 702n + 729 \\ &= 676n + 676 \end{aligned}$$

   soit $\boxed{a_{n+1} - 27a_n = 676(n+1)}$.
3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « 169 divise a_n ».
   On a vu que 169 divise a_0 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
   Alors, 169 divise a_k et, comme $676 = 4 \times 169$, 169 divise 676. Ainsi, 169 divise toute combinaison linéaire de a_k et 676. En particulier, 169 divise $27a_k + 676(k+1)$ qui est égal à a_{k+1} d'après la question précédente. Ainsi, 169 divise a_{k+1} donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
   On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ 169 divise } a_n}$.

Exercice 4

1. On a $n = 5q + r$ avec $0 \leq r < 5$. $q = 3r$ donc $n = 15r + r = 16r$.

r	0	1	2	3	4
n	0	16	32	48	64

2. On a $\begin{cases} a = bq + 8,\ b > 8 \\ 2a = bq' + 5, b > 5 \end{cases}$. En multipliant la 1re équation par 2 et en soustrayant terme à terme, on trouve : $2bq + 16 - bq' - 5 = 0 \Leftrightarrow b(2q - q') = -11$. b est donc un diviseur de -11 supérieur à 8 et inférieur à 20 soit $b = 11$.

Exercice 5

Reste de x modulo 6	0	1	2	3	4	5
Reste de $2x$ modulo 6	0	2	4	0	2	4
Reste de x^2 modulo 6	0	1	4	3	4	1

1. On déduit du tableau que $2x \equiv 4\ [6]$ si et seulement si $x \equiv 2\ [6]$ ou $x \equiv 5\ [6]$. Ainsi, l'ensemble des entiers x tels que $2x \equiv 4\ [6]$ est $\{2 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
   Remarque. — Cet ensemble est égal à $\{2 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. De même, $x^2 \equiv 2x\ [6]$ si et seulement si $x \equiv 0\ [6]$ ou $x \equiv 2\ [6]$ donc l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv 2x\ [6]$ est $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 6

1. On remarque $3^4 = 81 = 1 + 5 \times 16 \equiv 1\ [5]$ donc $(3^4)^n \equiv 1^n\ [5]$ i.e. $\boxed{3^{4n} \equiv 1\ [5]}$.
   De même, $4^2 = 16 = 1 + 5 \times 3 \equiv 1\ [5]$ donc $(4^2)^n \equiv 1^n\ [5]$ i.e. $\boxed{4^{2n} \equiv 1\ [5]}$.
2. On en déduit que
   $$A_n = 3^{4n+3} + 4^{2n+1} = 3^3 \times 3^{4n} + 4 \times 4^{2n} \equiv 27 \times 1 + 4 \times 1\ [5] \equiv 31\ [5] \equiv 1\ [5]$$
   donc $A_n - 1 \equiv 0\ [5]$ i.e. $\boxed{5 \text{ divise } A_n - 1}$.
3. Comme $3 \equiv 1\ [2]$, $3^{4n+3} \equiv 1^{4n+3}\ [2] \equiv 1\ [2]$ et, comme $4 \equiv 0\ [2]$ et $2n+1 > 0$, $4^{2n+1} \equiv 0\ [2]$. Ainsi, $A_n \equiv 1\ [2]$ donc $A_n - 1 \equiv 0\ [2]$ i.e. $\boxed{A_n - 1 \text{ est pair}}$.

Bonus !

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $a = 1$, l'égalité est évidente car $a^N - 1 = 1^N - 1 = 0$ et $a - 1 = 1 - 1 = 0$. Sinon, $\sum\limits_{k=0}^{N-1} a^k$ est la somme N premiers termes d'une suite géométrique de raison $a \neq 1$ donc $\sum\limits_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{1-a^N}{1-a} = \frac{a^N-1}{a-1}$. En multipliant par $a - 1$, on obtient l'égalité voulue.
On a donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{a^N - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{N-1} a^k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'égalité précédente avec $a = 4$ et $N = n + 1$, il vient

$$4^{n+1} - 1 = (4-1)\sum_{k=0}^{N-1} 4^k = 3\sum_{k=0}^{N-1} 4^k.$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{N-1} 4^k$ est un entier (puisque c'est une somme d'entiers), on en déduit que $\boxed{3 \text{ divise } 4^{n+1} - 1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)4^{n+2} - (n+2)4^{n+1} + 1 \\ &= n4^{n+2} + 4^{n+2} - (n+1)4^{n+1} - 4^{n+1} + 1 \\ &= 4n4^{n+1} - 4(n+1)4^n + 4 - 4 + 4^{n+1}(4-1) + 1 \\ &= 4(n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1) + 3 \times 4^{n+1} - 3 \end{aligned}$$

donc $\boxed{u_{n+1} = 4u_n + 3(4^{n+1} - 1)}$.
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition, P_n : « 9 divise u_n ».

- On a vu que 9 divise u_0 donc P_0 est vraie.
- Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
- Alors, d'une part 9 divise u_k et, d'autre part, d'après [redacted] a), 3 divise $4^{k+1} - 3$ donc 3×3 divise $3(4^{k+1} - 1)$. Ainsi, 9 divise u_k et $3(4^{k+1} - 1)$ donc 9 divise $4u_n + 3(4^{n+1} - 1)$ i.e. 9 divise u_{k+1}. Ainsi, P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 9 \text{ divise } u_n}$.

Supposons que k est un entier naturel tel que $a^k \equiv 1\ [m]$. Écrivons la division euclidienne 2.
de k par d : il existe deux entiers naturels q et r tels que $n = dq + r$ et $0 \leqslant r < d$. Dès lors,

$$1 \equiv a^k\ [m] \equiv (a^d)^q \times a^r\ [m] \equiv 1^q \times a^r\ [m] \equiv a^r\ [m]$$

donc $a^r \equiv 1\ [m]$. Ainsi, r est un entier naturel strictement inférieur à d tel que $a^r \equiv 1\ [m]$. Or, d est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^d \equiv 1\ [m]$ donc, comme $r < d$, $r = 0$. Par suite, d divise k.
Réciproquement, soit k un entier naturel tel que d divise k. Alors, il existe un entier naturel q tel que $k = dq$ donc

$$a^k = (a^d)^q \equiv 1^q\ [m] \equiv 1\ [m].$$

On a donc bien montré que $a^k \equiv 1\ [m]$ si et seulement si d divise k.