Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°6 de mathématiques** **Term**

Fonction ln, géométrie dans l'espace **Durée : 2h30**

11/03/21

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre en indiquant l'ensemble de définition de l'(in)équation au préalable :
   a) $\ln(x^2-1) = -\ln 2$;
   b) $e^{2\ln(x+1)} = \ln(e^4)$;
   c) $\ln(x^2) > (\ln x)^2$;
   d) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 < 0$.
2. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 6\ln x + \ln y = 1 \\ \ln x - 5\ln y = -5 \end{cases}.$$
3. Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = e^2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n e^{-1}} \end{cases}.$$
   Soit (v_n) la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1+\ln(u_n)}{2}$.
   a) Démontrer que (v_n) est géométrique dont on précisera sa raison et son 1er terme.
   b) En déduire v_n en fonction de n.
   c) Déterminer u_n en fonction de n

Exercice 2

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

1. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$.
2. a) Montrer, que pour tout x strictement positif on a :
$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer le tableau de variations de la fonction f. *Justifier soigneusement.*
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α, dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ puis en déduire le signe de $f(x)$.
5. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5\ln(u_n+3) \end{cases}$. On considère la fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 5\ln(x+3)$.
   a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b) Emettre une conjecture quant au sens de variation de la suite (u_n).
   c) Etudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

d) Vérifier tout d'abord que $g(\alpha) = \alpha$. Puis montrer par récurrence que pour entier naturel $n, 0 \leq u_n \leq \alpha$.

e) En utilisant le signe de $f(x)$ vu à la question 4., démontrer la conjecture émise à la question 5.b).

f) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un nombre que l'on précisera.

Exercice 3

Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les points

$$A(2\,;4\,;1),\ B(0\,;4\,;-3),\ C(3\,;1\,;-3),\ D(1\,;0\,;-2),\ E(3\,;2\,;-1),\ I\left(\frac{3}{5}\,;4\,;-\frac{9}{5}\right)$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x+2y-z-11=0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD)\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+2t \\ y & = & -1+\ t \\ z & = & 1-\ t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Le point I est sur la droite (AB).

Bonus !

1. Démontrer que $\forall x > 0,\ \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Barème probable **/30** **Ex 1 : 12** **Ex 2 : 13** **Ex 3 : 5** **Bonus ! 3**