Corrigé du DS n°6 (11/03/21)

Exercice 1

1. a) $D =]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$. $S = \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\,\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.
   b) $D =]-1\,;\,+\infty[$. $S = \{1\}$.
   c) $D =]0\,;\,+\infty[$. $S =]1\,;e^2[$.
   d) $D =]0\,;\,+\infty[$. $S =]e^{-3}\,;e^2[$.
2. Faisons $5 * L_1 + L_2$, on obtient : $11\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.On remplace dans la 1re ligne : $\ln y = 1 \Leftrightarrow y = e$. Le couple $(1\,;e)$ est solution.
3. a) On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1+\ln(u_{n+1})}{2}}{\frac{1+\ln(u_n)}{2}} = \frac{1+\ln(u_{n+1})}{1+\ln(u_n)} = \frac{1+\ln\left(\sqrt{u_n e^{-1}}\right)}{1+\ln(u_n)} = \frac{1+\frac{1}{2}\ln(u_n)-\frac{1}{2}\ln e}{1+\ln u_n} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(u_n)}{1+\ln(u_n)} =$
   $\frac{\frac{1}{2}(1+\ln(u_n))}{1+\ln(u_n)} = \frac{1}{2}$.
   La suite est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et le 1er terme est $v_0 = \frac{1+\ln e^2}{2} = \frac{1+2\ln e}{2} = \frac{3}{2}$.
   b) D'après la question précédente, $v_n = v_0 q^n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   c) Comme $v_n = \frac{1+\ln(u_n)}{2}$, on a $1 + \ln(u_n) = 2v_n \Leftrightarrow \ln(u_n) = 2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = e^{2v_n - 1} \Leftrightarrow$
   $u_n = e^{2\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ soit $u_n = e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$.

Exercice 2

1. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) = \frac{5}{x+3} - 1 = \frac{5-(x+3)}{x+3} = \frac{5-x-3}{x+3} = \frac{2-x}{x+3}$.
2. a) Soit $x > 0$, on a $x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 5\ln x - x + 5\ln\left(\frac{x+3}{x}\right) = 5\ln x - x +$
   $5\ln(x+3) - 5\ln x = 5\ln(x+3) - x = f(x)$.
   Donc pour tout $x > 0, f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$.
   b) On a d'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5\frac{\ln x}{x} - 1 = -1$ par somme puis par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$. Et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + 1 = 1$ par somme puis par composition et produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 0$.
   On en déduit par somme que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = -\infty$.
3. Comme $f'(x) = \frac{2-x}{x+3}$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $2 - x$ puisque $x + 3 > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ et inversement.
   On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f			$5\ln 5 - 2$		
	$5\ln 3$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

4. - Sur l'intervalle $[0\,;2]$, f admet comme minimum $5\ln 3 \approx 5{,}49 > 0$.
   Donc pour tout $x \in [0\,;2]$, $f(x) \geq 5\ln 3 > 0$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, f est continue et strictement croissante.
   De plus, $f(2) = 5\ln 5 - 2 \approx 6{,}05$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Donc par le corollaire du TVI, il existe une solution dans $[2\,;\,+\infty[$ à l'équation $f(x) = 0$.

On conclut qu'il existe une unique solution $\alpha \in [2\,;\,+\infty[\subset [0\,;\,+\infty[$ à l'équation $f(x) = 0$.

Voici le signe de la fonction f résumé dans le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

5. a) $u_1 \approx 9{,}73$ $\quad u_2 \approx 12{,}72$ $\quad u_3 \approx 13{,}77$ $\quad u_4 \approx 14{,}10$
   b) On constate que $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$. Donc la suite (u_n) semble croissante.
   c) g est bien dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et l'on a :
   $g'(x) = \frac{5}{x+3} > 0$ car $x + 3 > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
   d) On a $f(x) = g(x) - x$ soit $g(\alpha) = f(\alpha) + \alpha = \alpha$ car $f(\alpha) = 0$.
   Tout d'abord, on remarque que $\boldsymbol{g(u_n) = u_{n+1}}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, appelons P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq \alpha$ ».
   Initialisation : On a $u_0 = 4 \geq 0$ et $u_0 \leq \alpha$ car à l'aide de la calculatrice $\alpha \approx 14{,}23$. Donc P_0 est vérifiée.
   Hérédité : Supposons pour $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie : $0 \leq u_n \leq \alpha$ or comme g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on obtient $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha) \Leftrightarrow 0 \leq 5\ln(3) \leq u_{n+1} \leq \alpha$
   Soit $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$. Donc P_{n+1} est prouvée.
   On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \alpha$.
   e) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = f(u_n)$. D'après la question précédente, $u_n \in [0\,;\,\alpha]$ et sur $[0\,;\,\alpha]$ le signe de f est positif. Donc on a $f(u_n) \geq 0$ soit $u_{n+1} - u_n \geq 0$ c'est-à-dire que (u_n) est croissante.
   f) (u_n) est croissante et majorée par α donc elle converge vers un réel l. Comme g est continue sur $[0\,;\,+\infty[$ puisque dérivable et que $g(u_n) = u_{n+1}$, on obtient $g(l) = l$. D'après la question 5.d), on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 3

1. L'équation $2x+2y-z-11=0$ est l'équation d'un plan $\mathscr{P}$.
   - $2x_A+2y_A-z_A-11=2\times2+2\times4-1-11=0$ donc A appartient à $\mathscr{P}$.
   - $2x_B+2y_B-z_B-11=2\times0+2\times4-(-3)-11=0$ donc B appartient à $\mathscr{P}$.
   - $2x_C+2y_C-z_C-11=2\times3+2\times1-(-3)-11=0$ donc C appartient à $\mathscr{P}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les trois points A, B et C ne sont pas alignés et appartiennent au plan $\mathscr{P}$, donc ce plan est le plan (ABC). L'affirmation est donc **vraie**.
2. $2x_E+2y_E-z_E-11=2\times3+2\times2-(-1)-11=0$ donc E appartient à (ABC).

   Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Alors : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=-4+0-4\neq0$

   donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux. Le point E n'est donc pas le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). L'affirmation est **fausse**.
3. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4+0-4=0$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) aussi. L'affirmation est **vraie**.
4. Le point C n'appartient pas à la droite dont on donne la représentation paramétrique. En effet, si c'était le cas, il existerait un réel t tel que :

   $\left\{\begin{array}{rcr}-1+2t&=&3\\-1+t&=&1\\1-t&=&-3\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}t&=&2\\t&=&2\\t&=&4\end{array}\right.$, ce qui est impossible. Par conséquent, l'affirmation est **fausse**.
5. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\0\\-\frac{14}{5}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AI}$. Les deux vecteurs sont colinéaires, donc I appartient bien à la droite (AB). L'affirmation est **vraie**.

Il fallait donc répondre : **V – F – V – F – V**