Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°7 de mathématiques** **Term**

Primitives et ED **Durée : 1h00**

26/03/21

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

1. Soit la fonction F définie sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ par $F(x) = x\ln x - x + K$ où $K \in \mathbb{R}$.

   a) Montrer que F est une primitive de $f(x) = \ln x$ sur I.

   b) Déterminer la primitive de f sur I telle que $F(e) = -1$.

2. Soit la fonction g définie sur $I = \mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x-1} + 1$.

   Pour tout réel x, on pose $G(x) = (ax + b)e^{x-1} + x$ où a *et* b sont des réels.

   Déterminer les valeurs de a et b de sorte que G soit une primitive de g sur I.

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions f suivantes sur I :

   a) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$, $I = \mathbb{R}$

   b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $I = \mathbb{R}^{+*}$

   c) $f(x) = 6x^2e^{x^3-1}$, $I = \mathbb{R}$

   d) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \sin(x)$, $I = \mathbb{R}$

2. Soit la fonction g définie sur $I =]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$.

   a) Déterminer les réels a et b tels que $g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$.

   b) En déduire l'ensemble des primitives de g sur I.
   Question bonus : Si $I = \mathbb{R}\backslash\{-1\,;2\}$, cela change-t-il votre réponse précédente ? *Justifier clairement*

Exercice 3

1. Déterminer la solution de chaque équation différentielle suivante vérifiant la condition initiale donnée :

   a) $2y' - \frac{1}{4}y = \frac{1}{2}$ avec $y(0) = 1$.

   b) $\sqrt{5}y' + 5y - \sqrt{5} = 0$ avec $y(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} + e$

2. Soit l'équation différentielle (E_1) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

   a) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -3e^{-3x}$ est une solution de (E_1).

   b) En déduire les solutions de (E_1).

3. Soit l'équation différentielle (E_2) : $2y' + 5y = 25x^2 + 7$.

   a) Déterminer une solution particulière u de (E_2) de la forme $u(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

   b) En déduire les solutions de (E_2).

Bonus !

1. Soit l'équation différentielle (G) : $y' = 2y(y-3)$ où y est une fonction qui ne s'annule pas.
   En posant $z = \frac{1}{y}$, transformer l'équation différentielle (G) en une équation différentielle (J) facilement résoluble.
   Résoudre (J) puis (G).
2. Prouver sans calcul de dérivée, que F et G sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la même fonction :
$$F(x) = \frac{x(2x-1)}{x^2+1} \text{ et } G(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2+1}$$

Barème indicatif /20 **Ex 1 : 5** **Ex 2 : 7** **Ex 3 : 8** **Bonus ! 2**