Thème : Matrices **CALCULATRICE INTERDITE** **04/10/21**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $2A - 3B$.

b) Déterminer si cela est possible AB et BA.

2. Soit $C = \begin{pmatrix} 10 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -1 \\ 20 & 0 \\ 30 & -1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer C^2 si cela est possible.

b) Déterminer si cela est possible CD et DC.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2x^2 & 6 \\ 0 & y^2 + 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 0 & 4y \end{pmatrix}$

Déterminer les nombres réels x et y tels que les matrices A et B soient égales.

Exercice 3 *Vrai ou faux*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, **en justifiant la réponse**. **Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 1 : La matrice identité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Affirmation 2 : Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix}$.

Il n'existe aucune valeur du réel t pour laquelle $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Affirmation 3 : Il existe une matrice carrée A d'ordre 3 telle que $A \neq I_3$ et $A^2 = I_3$.

Exercice 4

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A^2, A^3 et A^4 puis conjecturer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'expression de A^k en fonction de k.

2. Démontrer la conjecture précédente par un raisonnement par récurrence.

Exercice 5

Soit (S) : $\begin{cases} -4x + 3y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ et $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que la matrice A est inversible.

2. Déterminer A^{-1}.

3. En montrant que le système (S) équivaut à une égalité matricielle, déterminer le couple solution de (S).

Tourner la page

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A(A - 2I_2) = 8I_2$.

2. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.

BONUS !

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et une matrice N appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels. Puis démontrer que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions N_1 et N_2.

Barème probable **Ex 1 : 5.5** **Ex 2 : 2** **Ex 3 : 3** **Ex 4 : 5** **Ex 5 : 2,5** **Ex 6 : 2**

Bonus : 2