Corrigé du DS 1 (11/10/21)

Exercice 1 (4)

1.a) FI du type "$\infty - \infty$"

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \qquad 1$$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

Par somme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} = +\infty$

Par quotient, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0$

b) FI du type "$\infty-\infty$".

$$3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)$$

$$= 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \qquad 1$$

$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \quad (3>1)$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \left(\frac{2}{3}<1\right)$

Par produit, $\lim_{n\to+\infty} 3^n - 2^n = +\infty$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq \sin(n^2) \leq 1$

Soit ____, $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 0,5

$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. 0,5

3.a) $\forall n \in \mathbb{N}, -\sqrt{n^2+5} \leq 0$

$\iff -n^3 - \sqrt{n^2+5} \leq -n^3$

$\iff v_n \leq -n^3$. 0,5

b) $\lim_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et $v_n \leq -n^3$) par le théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ 0,5

Exercice 2 (3)

1. Soit $P(n)$: "$u_n \leq 2$".

* $n=0$: $u_0 = 1 \leq 2$. $P(0)$ est vraie 0,5
* Supposons que pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

Donc : $\frac{1}{2}u_n \leq 1 \iff \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2$

$\iff u_{n+1} \leq 2$. 1

$P(n+1)$ est vraie

* Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$. - 0,25 si pas conclusion

2.a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n$

$= -\frac{1}{2}u_n + 1$

Comme $u_n \leq 2$, on a $-\frac{1}{2}u_n \geq -1$ 1

$\iff -\frac{1}{2}u_n + 1 \geq 0$

Soit (u_n) croissante $\iff u_{n+1} - u_n \geq 0$

b) Comme (u_n) est majorée et croissante, par le théorème de convergence monotone (u_n) converge. 0,5

Exercice 3 (3,5)

1. $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{7}{4}$; $u_2 = \frac{41}{16}$; $u_3 = \frac{219}{64}$

(u_n) semble croissante. 0,5

2. Soit $Q(n)$: "$n \leq u_n \leq n+1$".

* $n=0$: $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 0+1$ 0,5

$Q(0)$ vraie.

* Supposons pour $n\in\mathbb{N}$, $n \leq u_n \leq n+1$.

Donc : $\frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}n + \frac{3}{4}$

$\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}n$ 1

$\iff n \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq n + \frac{3}{4}$

$\iff n+1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq n + \underbrace{\frac{3}{4} + 1}_{\leq 2}$

$\iff n+1 \leq u_{n+1} \leq n+2$

$Q(n+1)$ est vraie

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie

3.a) D'après 2., $u_n \leq n+1$.

et $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - u_n$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

On a : $-\frac{1}{4}u_n \geq -\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}$ 0,5

$\iff -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n \geq -\frac{1}{4}$

$\iff -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \geq -\frac{1}{4} + 1$

$\iff u_{n+1} - u_n \geq \frac{3}{4} \geq 0$

Donc (u_n) est croissante.

b) $n \leq u_n \leq n+1$

$\iff 1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$

$\iff 1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$. D'où par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$ 0,5

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $u_n \geq n$, par le théorème de comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 4 (4)

1. f est dérivable sur $[0;4]$ et :

$$f'(x) = \frac{3(4+x) - (2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2}$$

Or, $(4+x)^2 > 0$ sur $[0;4]$, soit $f'(x) > 0$ sur $[0;4]$

Donc f est croissante sur $[0;4]$. 1

2. Soit $R(n)$: "$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$"

* $n=0$: $u_0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{11}{7} \simeq 1,57$

Soit $1 \leq \frac{11}{7} \leq 3 \leq 3 \iff 1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$ R(0) vraie 0,5

* Supposons pour $n\in\mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

Alors comme f est croissante sur $[0;4]$, on a : 0,5

$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3)$

$\iff 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{11}{7} \leq 3$

$R(n+1)$ est vraie

* $\forall n \in \mathbb{N}$ ...