

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. On donnera les solutions sous **forme algébrique**.

1. $\frac{2}{z} + 3i = -2 - 5i$
2. $\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i} = 3$
3. $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$
4. $(z - 2)^2 = -4$
5. $3z^2 + 2z = -2$
6. $\frac{2}{z^4} + \frac{7}{z^2} = -3$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{C} le système d'équations suivant. On donnera les solutions sous **forme algébrique**.

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 8 \\ z_1 + z_2 = 5 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit (z_n) la suite définie par $z_0 = 1 - i$ et, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = (1 + i)z_n + 2 - i$.

1. Calculer z_1 puis z_2 .
- On pose, pour tout entier naturel n , $w_n = z_n - (1 + 2i)$.
2. Calculer w_0 puis w_1 .
3. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.
4. En déduire l'expression de w_n en fonction de n puis de celle de z_n .
5. Retrouver les valeurs de z_1 et z_2 à l'aide de la question 4.

Exercice 4

Soit P le polynôme défini par $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z - i)(z^2 + pz + q)$.
3. Déterminer alors toutes les racines du polynôme P .

Exercice 5

Soit P le polynôme défini par $P(z) = z^3 + (-2 - 3i)z^2 + (4 + 6i)z - 12i$.

1. Déterminer a tel que $P(ai) = 0$.
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 6

1. Factoriser dans \mathbb{C} le polynôme $z^4 - 1$.
2. Résoudre l'équation $z^4 - 1 = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{z+2+i}{z-1}\right)^4 = 1$.

Exercice 7Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - (1 + a + a^2)z + a(1 + a^2) = 0, \text{ où } a \in \mathbb{C}.$$

BONUS !1) Calculer $\sum_{k=0}^{2021} i^k$

2) Soit $z = \frac{5+3i\sqrt{2}}{1-2i\sqrt{3}}$. Montrer que pour tout n entier naturel,
$$z^{3n+2} = -2^{3n+1}(1 + i\sqrt{3}).$$

Barème probable Ex 1 : Ex 2 : Ex 3 : Ex 4 : Ex 5 : Ex 6 : Ex 7 : Bonus :