Thème : Graphes **21/03/22**

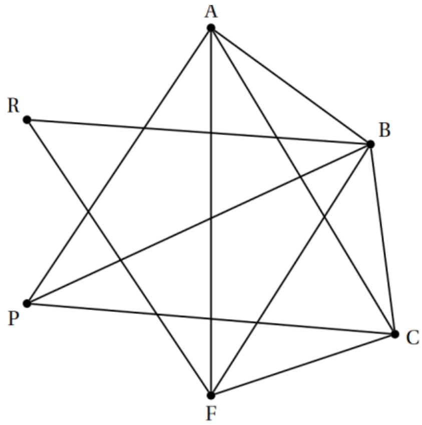
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

L'organisatrice d'une course à pied dans la ville de Berlin voudrait faire passer les participants par les lieux suivants :

- Alexanderplatz (A)
- Porte de Brandebourg (B)
- Checkpoint Charlie (C)
- Fleamarket (F)
- Musée de Pergame (P)
- Reichstag (R)

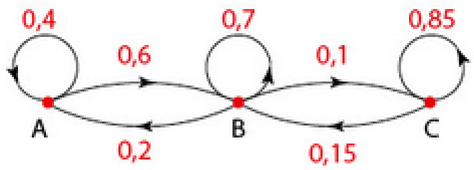
Voici le graphe :



1. a. Quel est l'ordre du graphe ?
b. Est-il complet ? *Justifier*
c. Est-il connexe ? *Justifier*
2. Donner la matrice d'adjacence M du graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. En calculant M^3, déterminer le nombre de parcours d'Alexanderplatz au Reichstag passant exactement par 3 rues.

Exercice 2

Soit le graphe pondéré donné ci-dessous associé à une chaîne de Markov.



Parmi les distributions proposées, une seule est la distribution invariante de la chaîne. Laquelle ? *Justifier*

(1) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (2) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (3) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Une course cyclosportive propose deux parcours : un grand de 130 kilomètres et un petit de 70 kilomètres.
L'étude ci-après porte sur les cyclistes fidèles qui participent tous les ans à cette épreuve.

En 2018, 42 % des cyclistes ont fait le grand parcours, les autres le petit.

Ces dernières années, les organisateurs ont constaté que :

- 90 % des cyclistes ayant fait le grand parcours une année se réinscrivent pour ce même parcours l'année suivante ; les autres s'inscrivent pour faire le petit parcours.
- 15 % des cyclistes ayant fait le petit parcours une année s'inscrivent sur le grand parcours l'année suivante ; les autres restent fidèles au petit parcours.

On note G l'état : « le cycliste fait le grand parcours », S l'état : « le cycliste fait le petit parcours » et $P_n = \begin{pmatrix} g_n & s_n \end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne donnant la probabilité, pour un cycliste, de participer respectivement au grand et au petit parcours lors de la course de l'année $(2018 + n)$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets G et S.

2. Recopier et compléter la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre des sommets G puis S :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer l'état initial P_0 et l'état P_1.
En déduire le pourcentage de cyclistes qui, selon ce modèle, participeront au grand parcours en 2019.

4. On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'état stable de ce graphe.

a. Calculer x et y en résolvant un système.

b. Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme le grand parcours aura plus de succès que le petit?

Exercice 4

Deux grossistes A et B se partagent la clientèle d'un liquide industriel.
On suppose que le nombre total de clients reste fixe d'une année sur l'autre.
En 2017, 45 % des clients se fournissaient chez le grossiste A et 55 % chez le grossiste B.
D'une année sur l'autre, 6 % des clients du grossiste A deviennent clients du grossiste B tandis que le grossiste B conserve 86 % de ses clients.
Chaque année, on choisit au hasard un client ayant acheté le liquide.
Pour tout entier naturel n on note :

- a_n la probabilité qu'il soit client du grossiste A en $(2017 + n)$,
- b_n la probabilité qu'il soit client du grossiste B en $(2017 + n)$.

Pour tout entier naturel n, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant l'état probabiliste de l'année $(2017 + n)$. On rappelle que $a_n + b_n = 1$.
On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste dans lequel les sommets A et B correspondent aux noms des grossistes.

2. **a.** Donner la matrice de transition T associée à ce graphe (les sommets seront rangés par ordre alphabétique).

b. Quelle sera, exprimée en pourcentage, la répartition prévisible des ventes entre ces deux grossistes en 2020? Justifier la réponse. On arrondira les résultats à 0,1 % près.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}14$.

a. On pose pour tout naturel n : $u_n = a_n - 0{,}7$.
Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = -0{,}25 \times 0{,}8^n + 0{,}7$.

c. Quelle part du marché, exprimée en pourcentage, le grossiste A peut-il espérer à long terme? Justifier la réponse.

d. À partir de quelle année le grossiste A détiendra t-il plus de 65 % du marché?

Exercice 5

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un triangle ABC.
A l'instant n=0, le mobile se trouve en A.
Si à l'instant n il est sur l'un des trois sommets alors à l'instant n+1, soit il y reste avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$, soit il se déplace sur un des deux autres sommets avec des probabilités égales.
On considère les événements suivants :

A_n : « le mobile se trouve en A à l'instant n ».
B_n : « le mobile se trouve en B à l'instant n ».
C_n : « le mobile se trouve en C à l'instant n ».
On note $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Dessiner le graphe probabiliste et donner la matrice de transition.
2. Soit $\pi_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$.
a) Montrer que les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6} \\ b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{6} \\ c_n = \frac{1}{2}c_{n-1} + \frac{1}{6} \end{cases}$$

b) En déduire que les suites $(a_n - b_n)$ et $(a_n - c_n)$ sont géométriques.
c) Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

BONUS !
On considère une chaîne de Markov (X_n) ayant pour distribution invariante π. Soit (Z_n) la chaîne de Markov définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $Z_n = X_{2n}$.
Démontrer que π est également une distribution invariante de (Z_n)

Barème probable **<u>Ex 1</u> :** **<u>Ex 2</u> :** **<u>Ex 3</u> :** **<u>Ex 4</u> :** **<u>Ex 5 :</u>** **Bonus :**