Lycée militaire de Saint-Cyr **DS de mathématiques** **Term**

Thème : Équations différentielles **Durée : 1h30**

17/03/22

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Déterminer la solution de chaque équation différentielle ci-dessous, vérifiant la condition initiale donnée.

$(E_1): 5y' - 2y = 0$ et $y(5) = e$.

$(E_2): \sqrt{3}y' + y = 0$ et $y(\sqrt{3}) = \frac{1}{e^3}$.

$(E_3): 2y' + 4y = 6$ et $y(0) = \frac{1}{2}$.

$(E_4): ey' + 2y = y - 2ey' + e$ et $y(3e) = 2e$.

Exercice 2

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note v(t) sa vitesse (en m.s^{-1}) à l'instant t (en s). On suppose que la fonction v ainsi définie est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que v est solution de l'équation différentielle $(E): 10y' + y = 30.$ Enfin, on suppose que le cycliste s'élance avec une vitesse initiale nulle.

1. Démontrer que $v(t) = 30(1 - e^{-\frac{t}{10}})$.

2. a) Déterminer les variation de v sur $[0; +\infty[$.

b) Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

3. Dans cette question, on considère que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération v'(t) est inférieure à 0,1 m.s^{-2} Déterminer à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste sera stabilisée.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $(E): y' + 4y = 3e^{-5x}$.

1. Résoudre l'équation homogène $(E_0): y' + 4y = 0.$

2. Déterminer le réel a tel que g définie par $g(x) = ae^{-5x}$ soit solution de (E).

3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4

On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 2(x+1)e^{2x}$.

1. Résoudre l'équation homogène $(E_0): y' - 2y = 0.$

2. Déterminer les rées a et b tels que h définie par $h(x) = (ax^2 + bx)e^{2x}$ soit solution de (E).

3. En déduire les solutions de (E).

4. Déterminer l'expression de la seule solution de (E) vérifiant $y(0) = -1$.

Exercice 5

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausse **sans justifier.**

Proposition 1

La fonction f définie par $f(x)=2e^{3x}-1/3$ est solution de $y'=3y+1$.

Proposition 2

La solution de $y'+y=1$ qui prend la valeur 2 en 0 a pour limite $+\infty$ en $-\infty$.

BONUS !

Soit l'équation différentielle (G) : $y' = 2y(y-3)$ où y est une fonction qui ne s'annule pas.

En posant $z = \frac{1}{y}$, transformer l'équation différentielle (G) en une équation différentielle (J) facilement résoluble.

Résoudre (J) puis (G).

Barème /20	EX 1	EX 2	EX 3	EX 4	EX 5	BONUS