Exercice 1

Déterminer la forme canonique de chaque polynôme suivant :

1. $f(x) = x^2 - 10x + 10$

2. $f(x) = x^2 + 18x + 30$

3. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

4. $f(x) = 3x^2 - x + 9$

5. $f(x) = -4x^2 - 10x + 2$

6. $f(x) = -5x^2 + 12x + 3$

Exercice 2

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 16 - x^2 - (x+6)(x+4)$.

1. Développer et simplifier $g(x)$.

2. Déterminer une forme factorisée de $g(x)$.

3. a) Déterminer la forme canonique de $g(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de g.

4. En utilisant la forme $g(x)$ la plus adaptée, calculer les images suivantes :

a) $g(0)$ **b)** $g(-4)$ **c)** $g(3\sqrt{2})$ **d)** $g\left(-\frac{5}{2}\right)$

Exercice 3

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

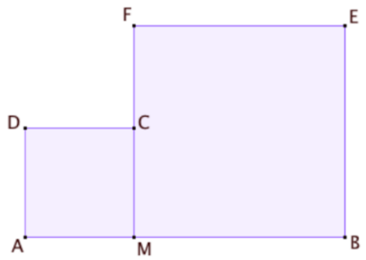
1. Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $h(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.

2. En développant l'expression avec les valeurs de a et c obtenues, déterminer le réel b.

3. En déduire une factorisation complète de $h(x)$.

Exercice 4 *Problème d'aires*

1. Sur un segment [AB] de longueur 10, on place un point M. On construit deux carrés AMCD et MBEF.



a. On pose $x = AM$. Exprimer l'aire des carrés AMCD et MBEF en fonction de x.

b. Prouver que la somme des aires des carrés s'exprime par la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

c. Exprimer l'expression de f sous forme canonique.

d. En déduire la position du point M pour que la somme des aires des deux carrés soit minimum.

2. Obtient-on un résultat analogue en calculant le minimum de la somme des aires de deux disques de diamètres respectifs [AM] et [MB] ?

3. On considère maintenant un carré de côté [AM] et un disque de diamètre [MB].

Démontrer que la somme des aires du carré et du disque est minimum lorsque le rayon du disque est égal à $\frac{10\pi}{\pi+4}$.

Exercice 5

Résoudre les équations du 2nd degré ci-dessous en utilisant uniquement pour les questions 4,5 et 6 la technique de la « racine évidente ».

1. $-3x^2 + 2 = 0$

2. $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$

3. $3x^2 + 2x\sqrt{6} + 2 = 0$

4. $x^2 + x - 2 = 0$

5. $2x^2 - x - 1 = 0$

6. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants :

$(s_1) : \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$ $(S_2) : \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 36 \end{cases}$ $(S_3) : \begin{cases} x + y = -\frac{1}{12} \\ xy = -\frac{1}{12} \end{cases}$

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

1. $2x^2 + (2\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$ Indication : Calculer $(2\sqrt{3} + 1)^2$ pour simplifier les racines.

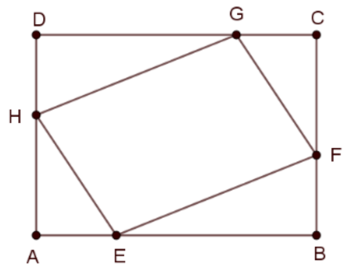
2. $2 + x = \sqrt{2x + 3}$

3. $x + \sqrt{x} - 2 = 0$ Indication : Poser $X = \sqrt{x}$.

4. $(2x - 5) - 3\sqrt{2x - 5} + 2 = 0$ Indication : Faire un changement de variable.

5. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0$ Indication : Faire un changement de variable.

Exercice 8



Soit ABCD un rectangle tel que AB=4 cm et BC=3 cm. Sur les côtés de ce rectangle, on place les points E, F, G et H comme sur la figure ci-contre tels que : $AE = BF = CG = DH$.

On pose $AE = x$ cm.

On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ l'aire du quadrilatère MNPQ.

1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

2. Vérifier que la somme des aires des 4 triangles AEH, BEF, CFG et DGH est égale à $7x - 3x^2$.

3. Déterminer la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$.

4. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$. Donner la position de E pour que $\mathcal{A}$ soit minimale

5. Résoudre l'équation $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

6. Existe-t-il une position du point E pour laquelle $\mathcal{A}$ est-elle égale à 7 cm^2 ?

Exercice 9 *Les drapeaux scandinaves*

1. On peut assimiler le drapeau suédois à un rectangle de côtés de longueur 8 et de longueur 5 composé d'une croix jaune sur fond bleu. On admet que l'aire de la croix jaune est égale aux trois dixièmes de l'aire totale du drapeau. Les deux bandes jaunes qui se croisent possèdent la même largeur x.

a. On cherche la largeur des bandes jaunes. Démontrer que le problème revient à résoudre l'équation $x^2 - 13x + 12 = 0$.

b. Résoudre l'équation et calculer la largeur des bandes jaunes.

2. Le drapeau finlandais peut être assimilé à un rectangle de côtés de longueur 8 et de largeur 5 composé d'une croix bleue sur un fond blanc tel que l'aire de la croix est égale aux trois huitièmes de l'aire totale du drapeau. Donner une valeur exacte puis un arrondi au dixième de la largeur des bandes.

Exercice 10

1. En multipliant par $\sqrt{3}$ puis en enlevant 1 cm de chaque côté d'un triangle équilatéral, son aire diminue de $\frac{\sqrt{3}}{8}$ cm^2. Quelle est la longueur du côté du triangle d'origine ?

2. L'aire d'un rectangle est 540 m^2 et les diagonales mesurent 39 m. Quel est le périmètre de ce rectangle ?

Exercice 11

On considère l'équation $x^2 + (m-4)x + 4 = 0\ :\ (E_m)$ où m est un paramètre réel.

1. Déterminer m pour que 1 soit solution de (E_m) et déterminer la 2de solution.

2. Déterminer m pour que (E_m) admette une unique solution.

3. Déterminer m pour que (E_m) n'admette aucune solution.

Exercice 12

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-6x^2 - 5x + 6 \leq 0$

2. $-x^2 + 4x - 8 < 0$

3. $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

4. $2x^2 - 2x\sqrt{6} - 5 \geq 0$

5. $(x+2)(6x^2 - 5x - 6) \leq 0$

6. $(3-2x)(x^2 - 3x + 2) \geq 0$

Exercice 13

Soit une droite D d'équation $y = -x - 4$ et une parabole P d'équation $y = 2x^2 + 3x - 4$.

1. Résoudre l'équation $2x^2 + 3x - 4 = -x - 4$.

2. En déduire les coordonnées points d'intersection de D et P.

3. Résoudre l'inéquation $2x^2 + 3x - 4 \leq -x - 4$.

4. En déduire les positions relatives de la droite D et la parabole P.

Exercice 14

Résoudre les deux inéquations suivantes :

1. $\frac{3x^2+1}{x+4} \geq 2x$. **Attention : Produit en croix interdit, on ne connaît pas le signe des deux membres !**

2. $\frac{4}{2-x} + \frac{3}{x+2} \geq \frac{3x^2}{4-x^2}$.

Exercice 15*

Soient p et q deux réels non nuls. Pour quelles valeurs de p et q, l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet-elle pour solutions les deux réels p et q ?

Exercice 16*

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère la fonction du 2nd degré h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x^2 - \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)x + b - a.$$

1. Montrer que, pour tout réel x, $h(x) > 0$.

2. En déduire que, quel que soit $c \in]0\ ;\ +\infty[$, $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{1}{c}(b-a) + c$.