<u>**Exercice 1**</u> *Raisonnements par récurrence*

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, n^2+n+2$ est un nombre pair.

3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1}=\frac{u_n+\frac{1}{n+1}}{2-u_n}$$
a. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1, u_2, u_3 et u_4.

b. Conjecturer l'écriture de u_n en fonction de n.

c. Démontrer cette conjecture par récurrence.

<u>**Exercice 2**</u>

Les quatre questions sont indépendantes

1. a. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2+1}$. *Utiliser le théorème de comparaison.*

b. En déduire la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = n - \sqrt{n^2+1}$. *Utiliser à la forme conjuguée.*

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n + 1 - \cos(n)$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $n \leq u_n \leq n+2$.

b. Quel est le comportement de la suite en $+\infty$?

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n - n$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3, u_n \geq 1{,}5^n$. En déduire le comportement de (u_n) en $+\infty$.

4.* Soit pour $n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

a. Montrer que Pour tout $k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b. En déduire que (u_n) converge. *Montrer que (u_n) est majorée et croissante…*

<u>**Exercice 3**</u>

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(2-u_n)$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x(2-x)$. Montrer que f est strictement croissante dans l'intervalle $[0\,;1]$ et que pour tout $x \in [0\,;1], f(x) \in [0\,;1]$.

2. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0\,;1]$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire la convergence de la suite (u_n).

<u>**Exercice 4**</u>

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}$.

1. Calculer u_1 et u_2 (*et si besoin, réécrire la relation de récurrence entre les termes u_{n+1} et u_n*)
2. Montrer que chaque terme de cette suite est bien défini et positif ou nul.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n+1$.
5. A l'aide d'un encadrement, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - n = \dfrac{u_{n-1}}{u_n + n}$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - n)$.

Exercice 5 *D'après BAC*

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n, affichage de deux chiffres pour les parties décimales).
À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n.
Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
Préciser sa raison et son premier terme.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6 *D'après BAC*

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
   return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.

- **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
- **c.** Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
  D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient? Justifier.

Exercice 7 *D'après BAC*

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

- **a.** Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
- **b.** Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type?
- **c.** Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

2.
- **a.** Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
- **b.** Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n).
- **a.** Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

- **b.** Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

6. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n) :
2   p= ...
3   s=[p]
4   for i in range (...) :
5       p=...
6       s.append(p)
7   return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction suite (n) retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

Exercice 8

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n+3.$$

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$

   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

   a. Exprimer S_n en fonction de n.

   b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.