Thème : Complexes – Calcul algébrique **12/09/22**

Exercice 1

Après calculs, on a :

$z_1 = -\frac{27}{16} - i.$

$z_2 = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$

$z_3 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i.$

Exercice 2

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} - i\right)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}(-i)^k \\ &= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^4(-i)^0 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^3(-i)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2(-i)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^1(-i)^3 \\ &+ \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^0(-i)^4 \\ &= \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{8} \times (-i) + 6 \times \frac{1}{4} \times (-1) + 4 \times \frac{1}{2} \times i + 1 \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{2}i - \frac{3}{2} + 2i + 1 \\ &= -\frac{7}{16} + \frac{3}{2}i.\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $z = a + ib$, où a, b sont deux réels.

On a $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{2a}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Tout d'abord, $z \neq 1$.
   On a $z + 1 = 2iz - 2i \Leftrightarrow z(1-2i) = -1-2i \Leftrightarrow z = \frac{-1-2i}{1-2i} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$. Soit $S = \left\{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right\}$.
2. Soit $z = a + ib$. On a $(2-i)z + \bar{z} - i = 1 + 3i + z \Leftrightarrow (2-i)(a+ib) + a - ib - i = 1 + 3i + a + ib \Leftrightarrow 2a + 2ib - ia + b + a - ib - i - 1 - 3i - a - ib = 0 \Leftrightarrow 2a + b - 1 + i(-a-4) = 0 \Leftrightarrow 2a + b - 1 = 0\ et - a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -4$ et $-8 + b - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -4$ et $b = 9$.
   Donc $S = \{-4 + 9i\}$.