# I Raisonnement par récurrence

## 1.1 Le principe

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel $n$. Par exemple, la propriété suivante : pour tout entier $n \geq 0$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ou encore, celle-ci-dessous.

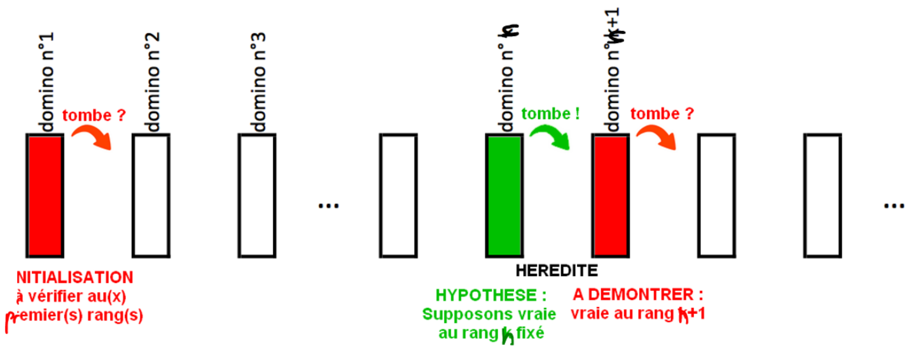
**Exemple introductif**

Soit $x \in \mathbb{R}$. En 1[re] , vous avez admis dans le cours sur la fonction exponentielle que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $(e^x)^n = e^{nx}$.

- Pour $n = 0$, cette propriété est vraie car $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0\times x} = e^0 = 1$.
- Pour $n = 1$, cette propriété est clairement vraie, chaque membre vaut $e^x$.
- Pour $n = 2$, on peut écrire $(e^x)^2 = e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$, en utilisant la formule $e^x e^y = e^{x+y}$ valable pour tous réels $x$ et $y$.
- Pour $n = 3$, écrivons
$$(e^x)^3 = (e^x)^2 \times e^x.$$
Or nous venons de voir que $(e^x)^2 = e^{2x}$ ; ainsi
$$(e^x)^3 = e^{2x} \times e^x = e^{2x+x} = e^{3x}.$$
On s'est servi du fait que la propriété est vraie pour $n = 2$ pour montrer qu'elle est vraie pour $n = 3$.
- Plus généralement, supposons avoir montré que la propriété est vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors est elle également vraie pour l'entier suivant $n + 1$ car
$$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}.$$
On dit que la propriété est **héréditaire**.

On conçoit alors que cela est suffisant pour affirmer que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 0$. En effet, dès qu'elle est vraie pour $n = 0$, donc par **hérédité**, elle est donc vraie pour $n = 1$. Mais comme elle est vraie pour $n = 1$, elle l'est aussi pour $n = 2$ par hérédité, ect.
La raisonnement par récurrence vise à formaliser cette idée.

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.




**Définition** Une propriété est dite héréditaire à partir du rang $n_0$ si lorsque pour un entier $n \geq n_0$ la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $n + 1$.

Si on suppose qu'un domino n tombe alors le domino suivant $(n + 1)$ tombe également.

**Théorème** *Principe de récurrence*
Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un nombre entier naturel $n$.
(i) Si $P(n)$ est vraie pour une valeur particulière $n_0$,
(ii) si $P(n)$ est héréditaire.
Alors, pour tout entier $n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

Le premier domino tombe (initialisation), ici $n_0 = 1$. De plus, l'hérédité est vérifiée (voir plus haut). On en déduit que tous les dominos tombent.

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on procède en 3 étapes :

- **Initialisation** On vérifie que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$ (généralement, pour $n = 0$ ou 1)
- **Hérédité** Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq n_0$. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie (*hypothèse de récurrence*) et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** On conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

**Remarque**
Une démonstration par récurrence sur les entiers est mise en œuvre lorsque toute démonstration « classique » est difficile.

**Exemple**
Soit la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Démontrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$ .

Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n = 2^n + 1$ ».

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité : Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} + 1$. $P(n)$ est donc vraie au rang $n + 1$.

- Conclusion : On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$.

**Remarque**
L'initialisation est indispensable dans les démonstrations utilisant le principe de récurrence sinon on peut démontrer des propriétés fausses !
En effet, prenons la propriété suivante : Pour tout n entier « $2^n$ est divisible par 3 ». Passons à l'hérédité sans passer par l'initialisation :
Supposons qu'il existe un entier $n$ tel que $2^n$ est divisible par 3 soit il existe $p$ un entier tel que $2^n = 3p$.
$2^{n+1} = 2^n \times 2 = 3p \times 2 = 6p$, donc $2^{n+1}$ est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée alors que la propriété est fausse (l'initialisation n'est pas vérifiée).

## Exercice 1

**1.** Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$ et $u_0 = 0$ est strictement croissante.
**2.** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = \frac{2n-1}{2^n}$. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.
**3.** Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k} + 1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}} - 1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

### 1.2 Inégalité de Bernoulli

**Propriété**
Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier naturel $n$ : $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

*Démonstration* ***à connaître***
Soit $P(n)$ la propriété : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Alors : $(1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na)$
Soit : $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$
Soit encore : $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$, car $na^2 \geq 0$.
D'où : $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$.
$P(n)$ est donc vraie au rang $n + 1$.
- Conclusion : On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$.

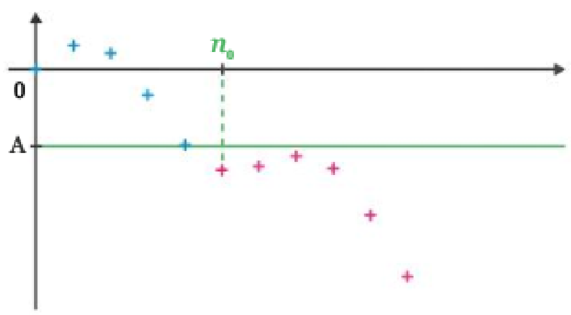
## II Limites d'une suite

### 2.2 Suite divergente et convergente

**Définitions** *Suite divergente*
(i) On dit que $(u_n)$ admet pour limite $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A\,;\,+\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de $(u_n)$ à partir d'un certain rang. On dit qu'une telle suite diverge et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(ii) On dit que $(u_n)$ admet pour limite $-\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty\,;\,A[$, où $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de $(u_n)$ à partir d'un certain rang. On dit qu'une telle suite diverge et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**Interprétation graphique de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$**

La suite représentée ci-dessous a pour limite $-\infty$. En effet, pour un réel A choisi, on peut trouver un rang $n_0$ à partir duquel tous les termes de la suite sont tous inférieurs strictement à A.




**Propriété**
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$.

***Démonstration en exercice***

**Exemple**
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$.

**Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A appelé algorithme de seuil**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.
Voici, ci-dessous, un algorithme écrit en langage naturel :

| Langage naturel |
|---|
| Définir fonction seuil(A)<br><br>n ← 0<br>u ← 2<br><br>Tant que u < A<br>    n ← n + 1<br>    u ← 4u<br>Fin Tant que<br><br>Afficher n |

En appliquant l'algorithme avec A=100, on obtient en sortie $n = 3$.
Ce qui veut dire qu'à partir du terme $u_3$, les termes de la suite dépassent le nombre 100.

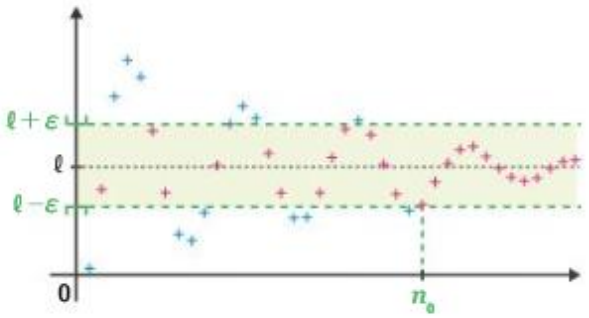
En langage calculatrice et Python, cela donne :

| TI | CASIO | Python |
|---|---|---|
| PROGRAM:SEUIL<br>:Input A<br>:0→N<br>:2→U<br>:While U<A<br>:N+1→N<br>:4*U→U<br>:End<br>:Disp N | ======SEUIL<br>"A="?→A↵<br>0→N↵<br>2→U↵<br>While U<A↵<br>N+1→N↵<br>4×U→U↵<br>WhileEnd↵<br>N | def seuil(a):<br>    n=0<br>    u=2<br>    while u<a:<br>        n=n+1<br>        u=4*u<br>    return(n) |

**Définition** *Suite convergente*
On dit que $(u_n)$ admet pour limite le réel $l$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $l$ contient tous les termes de $(u_n)$ à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)$ converge vers $l$ et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

**Remarque**
On peut réécrire la définition de la façon suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, u_n \in ]l - \varepsilon\,; l + \varepsilon[$.

**Interprétation graphique de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$**
La suite représentée ci-dessous a pour limite $l$. En effet, on peut trouver un rang $n_0$ à partir duquel tous les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de $l$.



**Exemple**
Soit $u_n = \frac{1}{n^3}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ donc la suite $(u_n)$ converge vers 0.

**Notation**
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ peut se noter parfois $u_n \to l$.

> **Propriété**
> Si la suite $(u_n)$ a pour limite $l$, alors cette limite est unique.

*Démonstration admise*

**Remarque**
Une suite qui n'a pas de limite, diverge. Par exemple, la suite $v_n = (-1)^n n^2$ prend alternativement des valeurs positives et négatives.

### 2.3 Limites de référence

**A connaître**

(i) $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^P = +\infty$, (ii) $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, (iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (iii)' $a \geq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{an+b}}_{b,t.q\ an+b\geq 0} = +\infty$

(iv) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$ (v) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty,$ (vi) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0.$

## III Opérations sur les limites

*Dans la suite « FI » veut dire Forme Indéterminée : on ne peut conclure de façon générale et il faut étudier les limites au cas par cas.*

### 3.1 La somme $(u_n + v_n)$

| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $l'$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | *FI* |
| $-\infty$ | $-\infty$ | *FI* | $-\infty$ |

**Exemples**
**1)** Soit $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n} + 2$ ; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$. Donc on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 2$.
**2)** Soit $u_n = -2n$ et $v_n = \frac{1}{2}n$ ; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. La limite de la suite $(u_n + v_n)$ est une FI.
Cependant, on a : $u_n + v_n = -2n + \frac{1}{2}n = -\frac{3}{2}n$. Donc on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$.

### 3.2 Le produit $(u_n v_n)$

| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l, l \neq 0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $l', l' \neq 0$ | $ll'$ | $0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | *FI* | *FI* |
| $+\infty$ | $\pm\infty$ | *FI* | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $\pm\infty$ | *FI* | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Exemples**

**1)** Soit $w_n = n^3 - n^2$. On ne peut pas appliquer le tableau concernant la somme de deux suites sinon on se retrouve avec une FI. On réécrit $w_n$ en **factorisant par le terme de plus haut degré** :
$w_n = n^2(n-1) = u_n v_n$ où $u_n = n^2 \to +\infty$ et $v_n = n - 1 \to +\infty$. On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

**2)** Soit $h_n = 2n - \sqrt{n}$. C'est une FI et on procède de la même façon que précédemment :
$h_n = n\left(2 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Et par produit des limites, on conclut que $h_n \to +\infty$.

### 3.3 Le quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l, l \neq 0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $l', l' \neq 0$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $0$ | $\pm\infty$ | FI | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\pm\infty$ | $0$ | $0$ | *FI* | *FI* |

**Remarque**

Lorsque $u_n \to +\infty$ et $v_n \to 0^-$ ( $v_n \to 0$ avec à partir d'un certain rang $v_n > 0$) alors $\frac{u_n}{v_n} \to -\infty$ (cf ex 2)).

**Exemples**

**1)** Soit $a_n = \frac{-2+\frac{1}{n}}{n-1} = \frac{u_n}{v_n}$. On a $u_n \to -2$ et $v_n = n - 1 \to +\infty$. On conclut que : $a_n \to 0$.

**2)** Soit $b_n = \frac{n^2}{\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$. On $n^2 \to +\infty$ et $\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0^-$ ($\sqrt{n} \leq n$, pour $n \geq 1$ croiss. comp.). Donc $b_n \to -\infty$.

**3)** Soit $c_n = \frac{2n^2-1}{4n^2+n}$. C'est une FI et pour lever l'indétermination, **on factorise au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré.** On a $b_n = \frac{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{n}{n^2}\right)} = \frac{2-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n}} \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

**4)** Soit $d_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$. C'est une FI et pour lever l'indétermination, **on utilise l'expression conjuguée**.
$d_n = \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}\right)\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{2n+1-2n+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$.
On a $\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1} \to +\infty$ car $\sqrt{2n+1} \to +\infty$ et $\sqrt{2n-1} \to +\infty$. Donc $d_n \to 0$.

**Remarque**

Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs. Il est important cependant de reconnaître les *FI* pour lesquelles il faudra utiliser des calculs afin de *lever l'indétermination* ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites (voir partie IV).

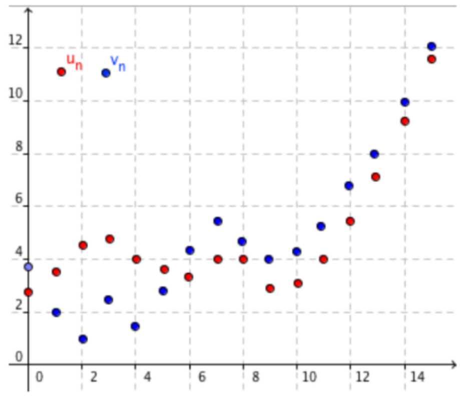
**Les quatre FI sont par abus d'écriture : « $\infty - \infty$ » ; « $0 \times \infty$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ».**

## IV Détermination de limites de suites

### 4.1 Limites et comparaison

**Théorème** *de comparaison*
Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Pour ce qui est de (i), par abus de langage, on pourrait dire que la suite $(u_n)$ pousse la suite $(v_n)$ vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.




*Démonstration de* ***(i) exemplaire***

**1.** Par hypothèse, il existe un rang $n_0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$.

Par ailleurs, $u_n$ tend vers $+\infty$. Par définition, pour tout réel $A$, il existe un rang $n_1$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant A$.

En choisissant $N = \max(n_0\,;\,n_1)$, les deux propriétés sont vérifiées : on a pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \geqslant A$.

Ainsi, pour tout réel $A$, il existe un entier $N$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $v_n \geqslant A$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

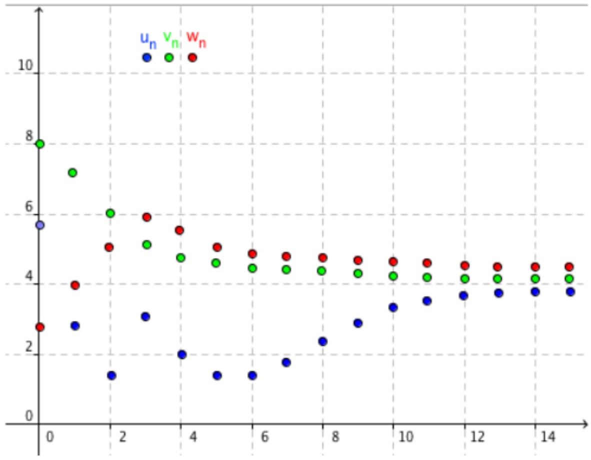
**Exemple**

Soit $u_n = n^2 - 1$ et $v_n = n^2 + \frac{1}{n} + 2$. Alors, on a $u_n \leq v_n$ et $u_n \to +\infty$ donc par (i), on a $v_n \to +\infty$.

**Théorème** *des gendarmes*
Soit $(u_n)$,$(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

*Démonstration admise*

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites $(u_n)$ et $(w_n)$ (*les gendarmes*) se resserrent autour de la suite $(v_n)$ à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.




**Remarque**

Le plus souvent pour appliquer ce théorème, on utilisera des encadrements classiques comme les trois encadrements suivants valables pour tout entier naturel $n$ : $-1 \leq \cos(n) \leq 1, -1 \leq \sin(n) \leq 1$ et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

**Exemple**

Soit $v_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$. On a $-\frac{1}{n^2} \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

> **Propriété** *Inégalité et limites*
> Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites convergentes. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
> Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

*Démonstration admise*

**Exemple**

Soit $(u_n)$ une suite convergente telle qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq e^{-n}$. On a $e^{-n} \to 0$ donc on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 0$.

## 4.2 Suite géométrique $(q^n)$

> **Propriétés** *Suite* $(q^n)$
> (i) Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
> (ii) Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
> (iii) Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
> (iv) Si $q \leq -1$, alors $(q^n)$ n'admet pas de limite, finie ou infinie.

*Démonstration de* ***(ii) exemplaire***

*Prérequis : Inégalité de Bernoulli Pour tout réel a>0 et pour tout entier naturel* $n$ *:* $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On suppose que $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.
$q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$, d'après l'inégalité de Bernoulli.
Or $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$.
Donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

**Exemples**

**1)** $1{,}5^n \to +\infty$ car $1{,}5 > 1$.

**2)** $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ .Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2$.

### 4.3 Suite majorée et minorée

**Définitions**

(i) On dit que $(u_n)$ est majorée par un réel M lorsque, pour tout entier naturel $n, u_n \leq M$. On dit que M est un majorant de $(u_n)$.

(ii) On dit que $(u_n)$ est minorée par un réel m lorsque, pour tout entier naturel $n, u_n \geq m$. On dit que m est un minorant de $(u_n)$.

(iii) Une suite $(u_n)$ est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

**Exemples**

**1)** Soit $u_n = 1-\frac{1}{n}$. Alors, on a $u_n \leq 1$. Donc 1 est un majorant de $(u_n)$.

**2)** Soit $v_n = n^2+1$. Alors, on a $v_n \geq 1$. Donc $(v_n)$ est minorée par 1.

**Remarques**

**1)** Toute suite croissante (resp. décroissante) est (resp. majorée) minorée par son 1er terme.

**2)** Une suite majorée (resp. minorée) possède une infinité de majorants (resp. minorants).

**Exercice 2**

**1.** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ et $u_1 = 1$. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est majorée par 3.

**2.** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ et $u_0=9$. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est bornée par 3 et 9.

### 4.4 Suites monotones

**Théorème** *de convergence monotone*

(i) Toute suite croissante majorée converge.

(ii) Toute suite décroissante minorée converge.

*Démonstrations admises*

**Exemple**

Soit pour tout entier naturel $n$ non nul, $v_n=\frac{1}{n}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et $(v_n)$ est strictement décroissante $(v_{n+1} < v_n)$ donc $(v_n)$ converge (vers 0).

**Remarques**

**1)** Une suite croissante et majorée par un réel $M$ converge vers un réel $l \leq M$.

**2)** Une suite décroissante et minorée par un réel $m$ converge vers un réel $l \geq m$.

**Attention**, Il n'y a pas en général égalité ($l = M, l = m$) car si $(u_n)$ est majorée par $M$ (resp. minorée par $m$), elle l'est aussi pour tout réel $M' \geq M$ (resp. pour tout réel $m' \leq m$).

> **Propriétés**
> (i) Soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et si $(u_n)$ est croissante alors elle est majorée par $l$.
> (ii) Soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et si $(u_n)$ est décroissante alors elle est minorée par $l$.

*Démonstrations admises*

**Exemple**

Soit $u_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $(u_n)$ est croissante. Donc on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2$.

> **Théorème**
> (i) Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
> (ii) Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

*Démonstration de **(i) exemplaire***

Soit un réel $a$. Comme $(u_n)$ n'est pas majorée, il existe un entier $p$ tel que $u_p > a$. La suite $(u_n)$ est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n \geq u_p$. Donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > a$. Et donc à partir d'un certain rang $p$, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Exemple**

Soit $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. En prenant la fonction $f: n \mapsto 2n^2 - 3n + 1$ (soit $u_n = f(n)$) et comme $f'(n) = 4n - 3 > 0$ pour $n \geq 1$, $(u_n)$ est strictement croissante pour $n \geq 1$.

Montrons qu'il existe un entier $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n > 10$.

$u_n > 10 \Leftrightarrow 2n^2 - 3n + 1 > 10 \Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 9 > 0$. On a $\Delta = 81 > 0$ ; soit $n_1 = \frac{3-9}{4} = -\frac{3}{2}$ et $n_2 = \frac{3+9}{4} = 3$.

Donc il existe un entier $n_0 = 3$ tel que $n \geq n_0, u_n > 10$ ; c'est-à-dire que $(u_n)$ est non majorée.

Comme $(u_n)$ est croissante et non majorée, on conclut que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

**Exercice 3**

Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$$

1. Déterminer la valeur exacte de $u_1$ et de $u_2$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature $n$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$
5. Justifier que la suite $(u_n)$ converge.

*D'après Bac S 2019*

## Solutions des exercices

### Exercice 1

1. $(u_n)$ est donc minorée par 3 et majorée par 9 ce qui signifie que pour tout entier naturel $n, 3 \leq u_n \leq 9$. Appelons $P_n$ cette propriété.
La 1re étape est l'initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 9$ et donc :
$3 \leq u_0 \leq 9$.

La 2ème étape est l'hérédité : supposons que pour $n \geq 0$, on a : $3 \leq u_n \leq 9$ et montrons que $P_{n+1}$ est vraie.

On a la suite d'inégalités suivantes :

$$3 \leq u_n \leq 9$$

$$\frac{1}{3} \times 3 + 2 \leq \frac{1}{3} u_n + 2 \leq \frac{1}{3} \times 9 + 2$$

$$3 \leq u_{n+1} \leq 5$$

D'où, finalement :

$$3 \leq u_{n+1} \leq 9$$

$P_{n+1}$ est donc vraie.

L'hérédité est bien montrée.

$\boxed{\text{On conclut que la suite } (u_n) \text{ est bornée par 3 et 9 .}}$

3.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$.
Hérédité : Soit $n$ un entier naturel.

Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} + \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}+1}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1} + \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}+1}.$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - 2^{n+1}\left(\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}+1}\right).$$

L'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ donne :

$$\left(x^{2^{n+1}}-1\right)\left(x^{2^{n+1}}+1\right) = \left(x^{2^{n+1}}\right)^2 - 1 = x^{2^{n+1}\times 2} - 1.$$

$$\left(x^{2^{n+1}}-1\right)\left(x^{2^{n+1}}+1\right) = x^{2^{n+2}} - 1 \text{ donc}$$

$$\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1} - \frac{1}{x^{2^{n+1}}+1} = \frac{x^{2^{n+1}}+1-\left(x^{2^{n+1}}-1\right)}{x^{2^{n+2}}-1} = \frac{2}{x^{2^{n+2}}-1}.$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+2}}{x^{2^{n+2}}-1}$.

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}.$$

## Exercice 3

1. • Avec $n=0$, $u_1 = 3 - \dfrac{10}{5+4} = 3 - \dfrac{10}{9} = \dfrac{27-10}{9} = \dfrac{17}{9}$ ;
   • Avec $n=1$, $u_2 = 3 - \dfrac{10}{\frac{17}{9}+4} = 3 - \dfrac{10}{\frac{53}{9}} = 3 - \dfrac{90}{53} = \dfrac{159-90}{53} = \dfrac{69}{53}$.
2. Démonstration par récurrence ;
   *Initialisation* : $u_0 = 5 \geqslant 1$ : la propriété est vraie au rang zéro ;
   *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 1$.
   $u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n + 4 \geqslant 5 \Rightarrow \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{u_n+4} \Rightarrow \dfrac{10}{5} \geqslant \dfrac{10}{u_n+4} \Rightarrow -\dfrac{10}{u_n+4} \leqslant -2 \iff$
   $3 - \dfrac{10}{u_n+4} \geqslant 3-2$, soit finalement $u_{n+1} \geqslant 1$ : la propriété est héréditaire.
   La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang $n$, elle est vraie au rang $n+1$ : d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} - u_n = 3 - \dfrac{10}{u_n+4} - u_n = 3 - u_n - \dfrac{10}{u_n+4} = \dfrac{(3-u_n)(u_n+4)-10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 12 - 10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$.
   Le trinôme a deux racines évidentes 1 et $-2$ ; il se factorise donc en :
   $-u_n^2 - u_n + 2 = (-u_n+1)(u_n+2)$ et finalement :
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
4. On a démontré à la question **2.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc $u_n + 4 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n \geqslant$ entraîne $1 - u_n < 0$ et donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite $(u_n)$ est décroissante.
5. La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite qui est supérieure ou égale à 1.