De nombreuses situations (géométriques, physiques, technologiques, …) conduisent à des équations ou des inéquations du *second degré* (c'est-à-dire « contenant du x^2 »). Il apparaît donc d'étudier la résolution de telles (in)équations. Par exemple, lorsqu'on lance un objet, sa trajectoire est parabolique : elle a une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$. On peut alors s'intéresser, entre autres, à l'endroit où l'objet va retomber sur le sol (solution de l'équation de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$).

I Fonctions polynômes du second degré

1.1 Définition

Définition On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels connus (appelés les coefficients), et $a \neq 0$.
Cette forme est appelée la forme développée (ou réduite).

Vocabulaire
1) On dit que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une fonction polynôme du second degré et $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré.
2) Si f est une fonction polynôme du second degré alors ; pour tout réel x, $f(x)$ est la somme de trois termes : ax^2, bx et c. Ces trois termes sont appelés des monômes et on dit parfois que f est une fonction trinôme du second degré (trinôme signifiant « somme de trois monômes »).

Remarque
La forme développée d'une fonction polynôme du second degré est unique. Par exemple,
soit $f(x) = x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = 3x - 1 + x^2$; f et g sont identiques ($f(x)$ est ce qu'on appelle un polynôme ordonné).

Exemples et contre-exemples
1) Les fonction suivantes sont des fonctions polynômes du second degré :
$x \mapsto x^2 - 5x + 4$ $(a = 1,\ b = -5,\ c = 4)$;
$x \mapsto -\frac{5}{3}x^2 + \sqrt{5}x - \pi$ $(a = -\frac{5}{3},\ b = \sqrt{5},\ c = -\pi)$;
$x \mapsto -x^2 + 3 - \frac{x}{7}$ $(a = -1,\ b = -\frac{1}{7},\ c = 3)$;
$x \mapsto 2 - \frac{x^2}{2}$ $(a = -\frac{1}{2},\ b = 0,\ x = 2)$;
$x \mapsto 3x^2 - 5x$ $(a = 3,\ b = -5,\ c = 0)$;
$x \mapsto x^2$ $(a = 1,\ b = 0,\ c = 0)$;
$x \longmapsto 2(x - 1)(x + 1)$ $(a = 2, b = 0, c = -2)$.
2) Les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes du second degré :
$x \mapsto 2x + 1$ (Fonction polynôme du premier degré)
$x \mapsto 3x^3$ (Fonction polynôme du troisième degré)
$x \mapsto 5x^2 + \dfrac{1}{x}$ (Fonction rationnelle)

1.2 Forme canonique

L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ est certes la plus simple mais n'est généralement pas bien adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations. L'outil de base pour la résolution d'équations (ou d'inéquations) de degré 2 (ou supérieur à 2) est la factorisation (mais pas seulement !).
Ainsi :

- Pour résoudre $4x^2 - 1 = 0$: on factorise en $(2x+1)(2x-1) = 0$ puis on annule chaque facteur pour trouver $S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.
- Pour résoudre $3x^2 + 2x = 0$: on factorise en $x(3x+2) = 0$ puis on annule chaque facteur pour trouver $S = \{0, -\frac{2}{3}\}$.
- Par contre, pour résoudre $x^2 + 2x + 5 = 0$ aucunes stratégies étudiées en seconde ne fonctionnent.

D'où la propriété suivante :

Propriété Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$. Alors, on a $\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$. Cette dernière expression est appelée la forme canonique de $f(x)$ et on a $\boldsymbol{\alpha = -\frac{b}{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta = f(\alpha)} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Exemples

1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{6} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = 3 - 6 + 1 = -2$.

La forme canonique est donc : $f(x) = 3(x-1)^2 - 2$.

2) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

- On met « a » en facteur de x^2 et de x uniquement : $2(x^2 + 2x) - 6$.
- Dans la parenthèse, on utilise la méthode de la « complétion du carré » : $x^2 + 2x$ c'est le début de l'identité remarquable $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ soit $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.
  D'où : $f(x) = 2((x+1)^2 - 1) - 6 = 2(x+1)^2 - 2 - 6$.
- La forme canonique est donc : $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$.

Si on souhaite résoudre l'équation $2x^2 + 4x - 6 = 0$: (E), on peut donc utiliser la forme canonique obtenue puis factoriser : $(E) \Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2((x+1)^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$(x+1-2)(x+1+2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$ soit $S = \{-3\,;\ 1\}$.

3) $f(t) = -2t^2 + 16t - 4$.

$f(t) = -2(t^2 - 8t) - 4 = -2((t-4)^2 - 16) - 4 = -2(t-4)^2 + 32 - 4$.

La forme canonique est donc : $f(t) = -2(t-4)^2 + 28$.

4) $f(u) = u^2 - u + 1$.

$f(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$.

La forme canonique est donc : $f(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Si l'on souhaite résoudre l'équation $u^2 - u + 1 = 0$; par équivalence on doit résoudre : $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ soit $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$ or un carré ne peut être négatif donc $S = \{\emptyset\}$.

Démonstration (de la propriété précédente)

Généralisons le procédé pour tout polynôme du second degré :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du 2nd degré avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

Pour tout réel x, on a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$$

Donc $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

1.3 Variations et représentation graphique

Propriétés Soit la f une fonction polynôme du 2nd degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $(a \neq 0)$.

(i) $\boldsymbol{a > 0}$: $\alpha = -\frac{b}{a}$ et $\beta = f(\alpha)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

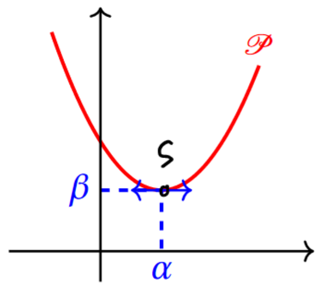
(ii) $\boldsymbol{a < 0}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

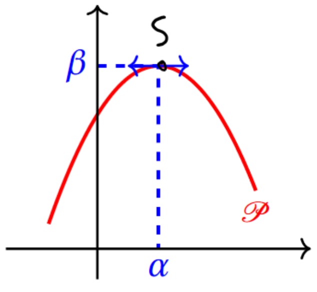
Démonstration en exercice

Soit la f une fonction polynôme du 2nd degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $(a \neq 0)$. La représentation graphique de f est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$.
Cette parabole admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = \alpha$.

$\boldsymbol{a > 0}$



$\boldsymbol{a < 0}$



Exemples

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

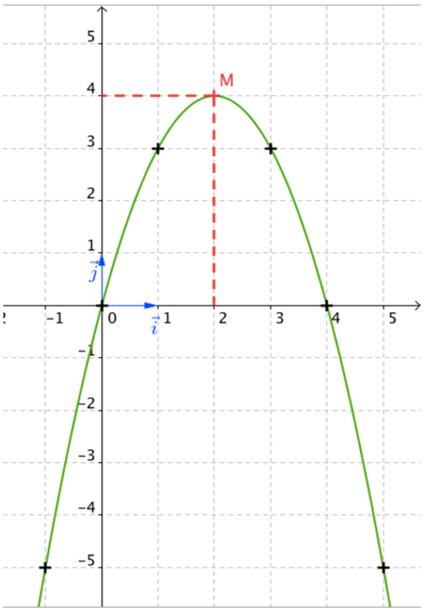
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x \\ &= -(x^2 - 4x) \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -((x-2)^2 - 4) \\ &= -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

f admet donc un maximum en 2 égal à
$f(2) = -(2-2)^2 + 4 = 4$

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↗	4	↘

On obtient la courbe représentative de f ci-contre.



2) Déterminons l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

- La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$, soit $x = -\dfrac{-12}{2\times 2}$ = 3.

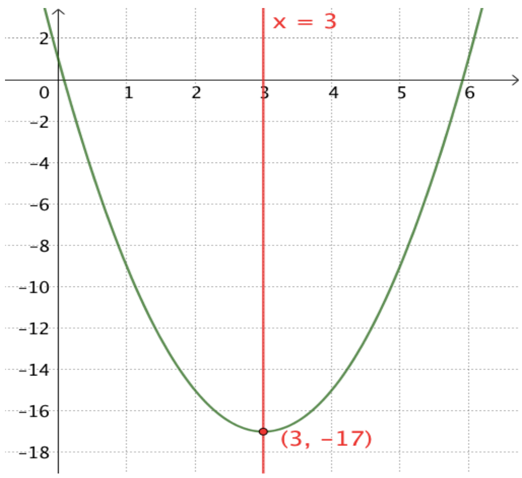
La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

- Les coordonnées de son sommet sont : $\left(-\frac{b}{2a}\,;\, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, soit :

$(3\,; 2\times 3^2 - 12\times 3 + 1) = (3\,;\, -17)$

Le point de coordonnées $(3\,;\, -17)$ est donc le sommet de la parabole.

$a = 2 > 0$, ce sommet correspond à un minimum.



II Résolution des équations du second degré

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a$\neq 0$, c'est trouver (s'il en existe) tous les nombres qui vérifient cette égalité. Un tel nombre est dit **solution** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ou **racine** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Définition Soit le polynôme du 2nd degré $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois nombres réels où $a \neq 0$.
Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$

Propriété Le nombre de solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$, dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	PAS DE SOLUTION	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
Forme factorisée	PAS DE FACTORISATION	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration ***exemplaire***
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$. D'après la démonstration de la page 3, $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$f(x) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$ ou encore en mettant en facteur a, on obtient :

$$f(x) = a\left(\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) = a\left((x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ c'est-à-dire : $a\left((x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0$ ou encore comme $a \neq 0$:

$$(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

- Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{(2a)^2} < 0$ donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation se ramène à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ d'où $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors $\frac{\Delta}{(2a)^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ et l'équation se ramène à :

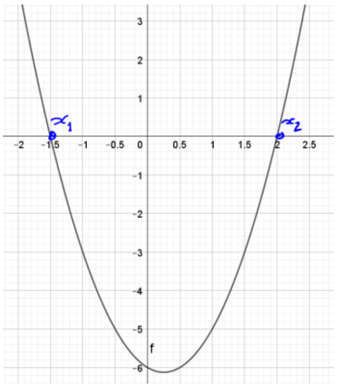
$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0.$$

Ainsi, $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, donc l'équation a deux solutions : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque
Les solutions, lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ et de l'axe des abscisses.
Exemples
1) $2x^2 - x - 6 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ = (−1)² − 4 x 2 x (−6) = 49. Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$.
On a : $2x^2 - x - 6 = 2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)$.

Graphiquement, en traçant la parabole d'équation $y = 2x^2 - x - 6$, on visualise les solutions sur l'axe des abscisses :



2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times 3 \times 2 = -8$, $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution.

3) Factorisation de $P(x) = x^2 - 4x\sqrt{3} + 12$
$\Delta = (4\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 12 = 0$ donc l'équation admet une unique solution : $x_0 = 2\sqrt{3}$.
On en déduit une factorisation de $P(x)$: $P(x) = (x - 2\sqrt{3})^2$.

Propriété Soit f la fonction polynôme du 2nd degré où $f(x) = ax^2 + bx + c$. x_1 et x_2 sont deux racines distinctes de $f(x)$. Alors, on a :
(i) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
(ii) $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Pour déterminer les racines d'un polynôme du 2nd degré, on peut parfois utiliser cette propriété en suivant les techniques ci-dessous :

- Technique de la « racine évidente » : Sont considérées comme « racine évidente » les nombres 0 ; 1 ; 2 ; −1 ; −2.

Exemple
Le polynôme $f(x) = 2x^2+4x-6$ admet $x_1 = 1$ pour racine évidente (car $f(1) = 2\times 1^2+4\times 1-6 = 0$).
Calculons x_2 : $\quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ c'est-à-dire $1 \times x_2 = \frac{-6}{2}$. On en déduit que $x_2 = -3$.

- Technique de la détection par somme-produit connu *utilisation peu fréquente*

Exemple
On cherche les racines éventuelles du polynôme $g(x) = x^2 - 7x + 12$.
Si elles existent, leur somme vaut $-\frac{b}{a} = 7$ et leur produit vaut $\frac{c}{a} = 12$.
On devine facilement que les nombres 3 et 4 conviennent.
On vérifie en remplaçant dans l'expression du polynôme : ce sont bien les racines.

Exercice 1
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

1. Déterminer une racine évidente de $f(x)$.
2. Trouver l'autre racine.

Exercice 2
Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm inscrit dans un cercle de diamètre 13 cm.

III Signe d'un trinôme – Application à la résolution d'inéquations

3.1 Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

Depuis la 2[de], vous savez étudier le signe d'un produit de facteurs (du 1[er] degré). Or, on a vu précédemment que $f(x)$ pouvait se factoriser. D'où la propriété suivante :

Propriété **Signe de $f(\mathrm{x}) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$**

<table>
<tr><th>$\Delta < 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta > 0$</th></tr>
<tr>
<td>$f(x)$ est du signe de a.
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table></td>
<td>$f(x)$ est du signe de a (et nul en $x_0 = \frac{-b}{2a}$).
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td>
<td>$f(x)$ est du signe de a sauf lorsque x est entre les racines x_1 et x_2, auquel cas $f(x)$ et a sont de signes contraires.
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>$-$signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td>
</tr>
</table>

Démonstration en exercice

3.2 Inéquations du second degré

Une inéquation du second degré à une inconnue x est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c > 0$

Exemples
1) $2x^2 - x - 6 \leq 0$.
On a $\Delta = 49 > 0$ donc les deux racines sont :
$x_1 = \frac{1+7}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2}$.
On a $a = 2 > 0$, d'où le tableau de signe de $2x^2 - x - 6$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2 - x - 6$		+	0	-	0	+	

Soit $S = [-\frac{3}{2} ; 2]$.

2) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2.$

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$.

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc $]-2-\sqrt{11}\,;\,-2+\sqrt{11}[$.

3) $x^2 + 2x > 0$

$x^2 + 2x = x(x+2)$. Les racines sont donc 0 et -2. Avec $a = 1$.

$S =]-\infty\,;\,-2[\cup]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 3

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$.

3.3 Application : Détermination de position relative de deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.
On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.
$f(x) - g(x) = -x^2 + 8x - 11 - x + 1 = -x^2 + 7x - 10$.
Le discriminant du trinôme $-x^2 + 7x - 10$ est $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 9$
Le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-7-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 5$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$

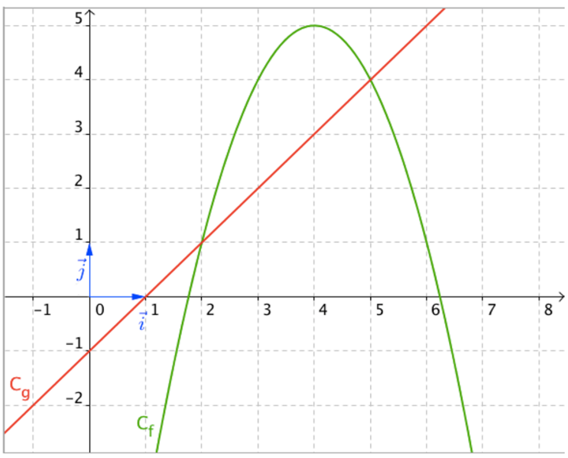
On dresse le tableau de signes du trinôme $-x^2 + 7x - 10$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		−	O	+	O	−	

On conclut :

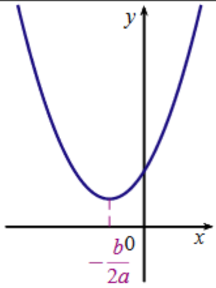
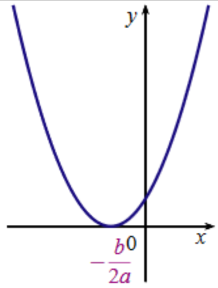
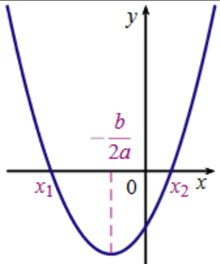
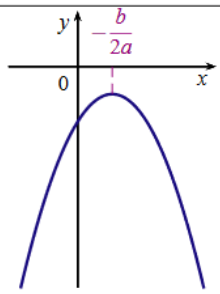
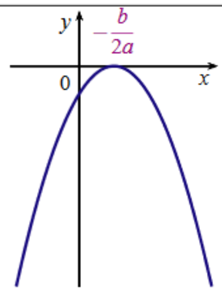
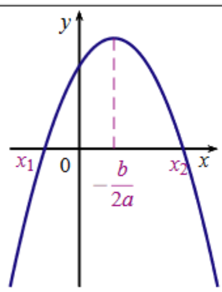
La courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g pour tout x de $]-\infty\,;2] \cup [5\,;\,+\infty[$.

La courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g pour tout x de $[2\,;5]$.



BILAN

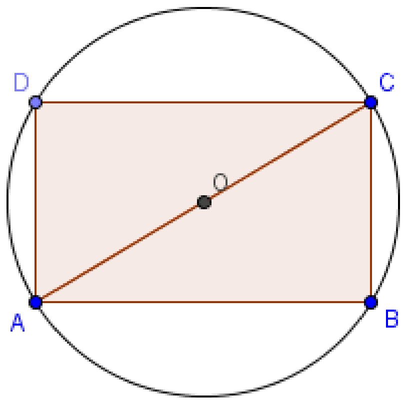
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	Variations	x : $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$; $f(x)$: $\searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\nearrow$		
	Courbe			
	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Négatif sur $[x_1; x_2]$
$a < 0$	Variations	x : $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$; $f(x)$: $\nearrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\searrow$		
	Courbe			
	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Positif sur $[x_1; x_2]$

Solution des exercices

Exercice 2

Un rectangle est un parallélogramme dans un cercle de diamètre l'une de ses diagonales.



Avec les données de l'énoncé, on a donc $\begin{cases} AB + BC = 17 \\ AC = 13 \end{cases}$. Comme le triangle ABC est rectangle en B, on a aussi $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Si l'on note $x = AB$, la dernière égalité conduit à $x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$. Voilà, le problème est bien du second degré puisqu'il nous amène à résoudre une équation du second degré.

En développant cette équation, on obtient $2x^2 - 34x + 17^2 - 13^2 = 0$ soit $2x^2 - 34x + 120 = 0$.
Après simplification (par 2), on résout $x^2 - 17x + 60 = 0$: $\Delta = 17^2 - 4 \times 60 = 49$ d'où les valeurs possibles $x_1 = \frac{17+7}{2} = 12$ et $x_2 = \frac{17-7}{2} = 5$.

Si $x = AB = 12$ alors $BC = 17 - AB = 5$ et si $x = AB = 5$ alors $BC = 12$.

<u>**Les dimensions du rectangle cherché sont donc L=12 cm et l=5 cm**</u>.

Exercice 3

$\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ équivaut à $\frac{1}{x^2-x-6} - 2 \geq 0$
Soit : $\frac{1}{x^2-x-6} - \frac{2(x^2-x-6)}{x^2-x-6} \geq 0$
Soit encore : $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0$

On commence par déterminer les racines du trinôme $x^2 - x - 6$:
Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et ses racines sont :
$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2\times1} = -2$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2\times1} = 3$

Les valeurs –2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$.

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2 + 2x + 13$:
Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :
$x_1' = \frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2' = \frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		−	0	+		+		+	0	−	
x^2-x-6		+		+	0	−	0	+		+	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		−	0	+	‖	−	‖	+	0	−	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est : $\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2} ; -2\right[$.