Exercice 1

Déterminer dans chacun des cas déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée.

1. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
2. $f(x) = \sqrt{x^4 + e^x}$
3. $f(x) = \exp\left(\frac{3-x}{x^2-1}\right)$
4. $f(x) = \left(x^5 - \frac{1}{x} + e^{-x}\right)^6$
5. $f(x) = x^2 \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$
6. $f(x) = \frac{4}{3(2x+1)^5}$
7. $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x-5}\right)^3$

Exercice 2

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1. Déterminer la fonction dérivée f'.
2. Déterminer le tableau de variations de f.
3. En déduire que, pour tous réels $a > 0, b > 0$: $\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$.

Exercice 3

Soit h la fonction définie par : $h(x) = e^{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h que l'on notera D_h.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction h puis calculer $h'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
4. Déterminer les équations des tangentes T_1 et T_4 à la courbe représentative de la fonction h aux points d'abscisses 1 et 4.
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des droites T_1 et T_4.

Exercice 4 *Obtentions d'inégalités*

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \geq 1 + x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{x} \geq \frac{x}{2}$. Puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ à l'aide de l'inégalité précédente.

Exercice 5 *D'après BAC*

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonrmal $(0\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A : étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. **a.** Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
   b. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : étude d'une tangente

1. On rappelle que f'' désigne la dérivée seconde de f.
   a. Montrer que, pour tout x réel, $f''(x) = 4(2x-1)\mathrm{e}^{-2x}$.

   b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.
2. Soit B le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ de la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en B.
3. On veut étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T : pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{\mathrm{e}}x + \frac{3}{\mathrm{e}}\right).$$

   a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   b. Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x.
   En déduire le sens de variations de g' sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
   d. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Que peut-on en conclure sur la position relative de $\mathscr{C}$ et T ?
4. Dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ placer les points A et B puis tracer la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

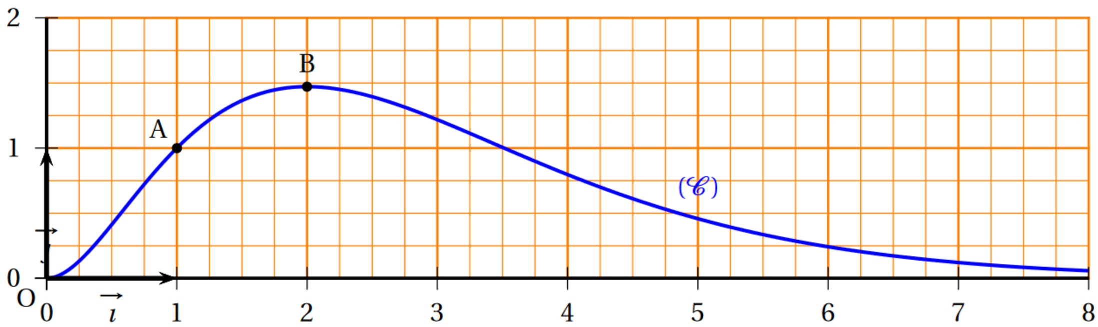
1. Etudier la convexité de la fonction f. *Préciser les points d'inflexion éventuels de la courbe représentative de f.*
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
3. En déduire une inégalité avec la fonction f.

Exercice 7 *D'après BAC*

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ à valeurs strictement positives sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On sait que :

On sait que :

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.
- La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O, A et B.
- Le point A a pour coordonnées $(1;1)$; la droite (OA) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
- Le point B a pour coordonnées $\left(2\,;\,\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)$. Au point B, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.



1. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $f'(2)$.
2. On admet que $\boldsymbol{f(x) = x^2 e^{-x+1}}$.
   a) Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de la fonction f.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
   c) Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 4.
3. Etudier la convexité de la fonction f. *Préciser les points d'inflexion éventuels de* $(\mathcal{C})$.
4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = e^{-f(x)}$.
   Dresser le tableau de variations de g.
5. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x) = \sqrt{f(x)}$.
   Dresser le tableau de variations de h.

Exercice 8 *D'après BAC*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. **a.** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Exercice 9

On définit :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 6x\sqrt{x} - 3x^2 - 2x$$

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer $f'(x)$.
2. Montrer que f' n'est pas dérivable en 0. En déduire son ensemble de dérivabilité.
3. Calculer $f''(x)$ puis déterminer les variations de f'.
4. Déduire de la question précédente que l'équation $f'(x) = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. En reprenant l'expression de $f'(x)$ et en posant $X = \sqrt{x}$, exprimer x_1 et x_2.
7. Tracer la courbe de f.

Exercice 10

Soit f la fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et (u_n) la suite définie par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout n entier naturel.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer par récurrence que u_n est positive.
3. Montrer par récurrence, que (u_n) est minorée par 1 et décroissante. Que peut-on en conclure ?
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11

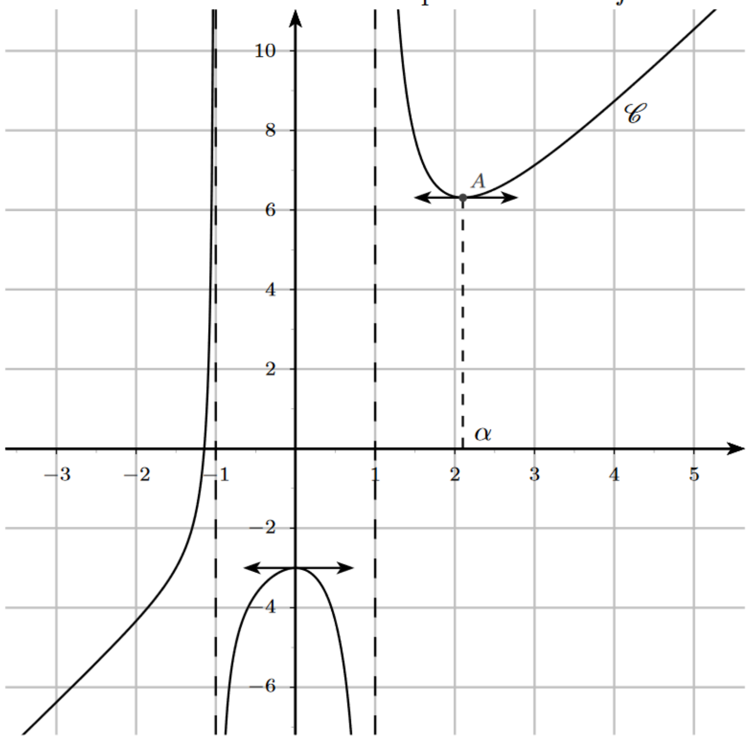
Soit f la fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - \frac{x+1}{e^x}$ et (v_n) la suite définie par :

$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$ pour tout n entier naturel.

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution x_0 appartenant à $\mathbb{R}^+$. Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement de x_0 à 10^{-2} près.
3. Montrer par récurrence, que (v_n) est croissante et majorée par x_0. Que peut-on en conclure ?
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice 12 *Problème*

1. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
   (a) Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   (d) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.
2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.
   On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
   (a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont on donnera des équations.
   (b) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
   (d) On a tracé ci-dessous la courbe représentative de f.

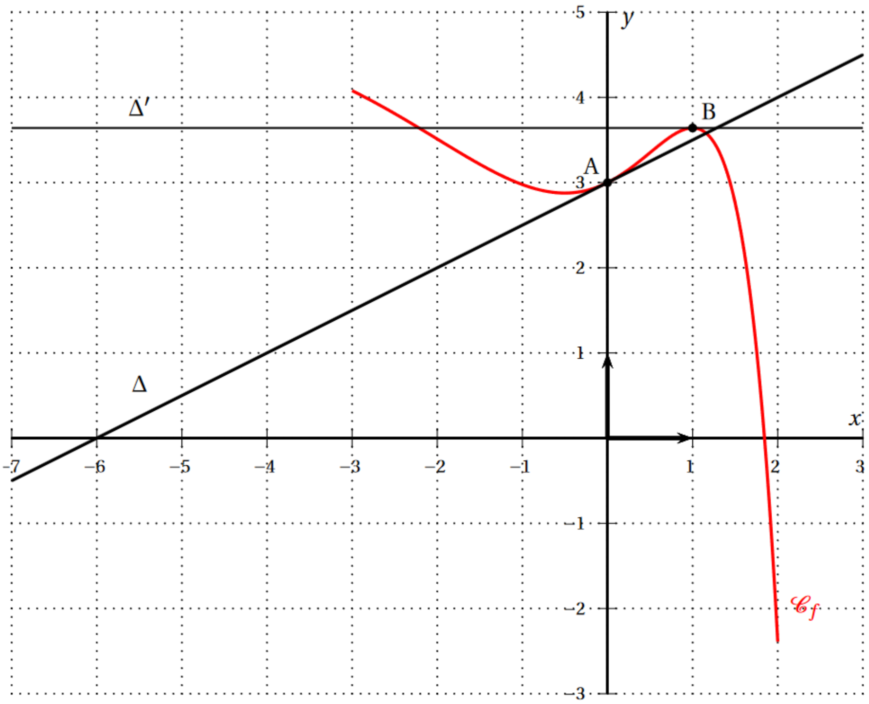


Montrer que le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse α a pour ordonnée $f(\alpha) = \dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$.

Exercice 13 *Problème – D'après BAC*

Partie A

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point A de coordonnées $(0 ; 3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :

- la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3\ ;\ -0,5]$ et $[1\ ;\ 2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0,5\ ;\ 1]$;
- la droite Δ d'équation $y = 0,5x + 3$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A ;
- la tangente Δ' à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.
2. Quel est le signe de $f'(-2)$?
3. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Le point A est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie B

On admet qu'il existe trois réels a, b et c pour lesquels la fonction f représentée dans la partie A est définie, pour tout réel x de $[-3\ ;\ 2]$, par :

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x + 5.$$

1. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que $c = -2$.
2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3\ ;\ 2]$, par :

$$f'(x) = \left(ax^2 + (2a + b)x - 2 + b\right)\mathrm{e}^x.$$

En utilisant les résultats de la partie A, justifier que $b = 2,5$ puis que $a = -1$.

Partie C

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[-3\ ;\ 2]$ par

$$f(x) = \left(-x^2 + 2,5x - 2\right)\mathrm{e}^x + 5.$$

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$

$$f'(x) = \left(-x^2 + 0,5x + 0,5\right)\mathrm{e}^x.$$

2. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $[-3\ ;\ 2]$.
3. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\ ;\ 2]$.

   b. Donner la valeur de α arrondie au centième.