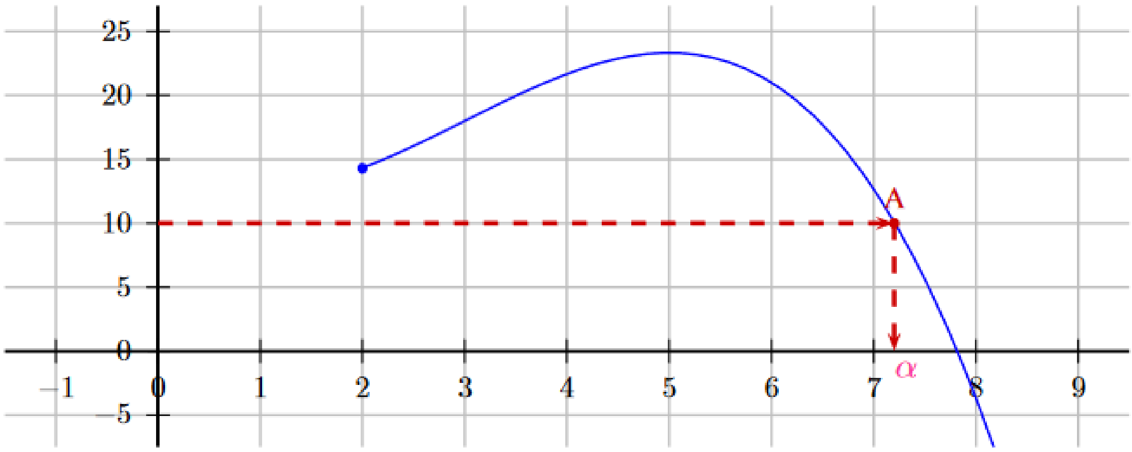
Guide de résolution d'une équation du type $f(x) = k$ à l'aide du TVI

On considère la fonction f définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$.



1. **Donner rapidement la limite de f en $+\infty$.**
   Pour tout réel x de $[2\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x) = x^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{15}{x^3}\right)$$

   Or d'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{15}{x^3}$$

   De ce fait :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{15}{x^3}\right) = -\frac{1}{3} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2. **Étudier les variations de f sur $[2\,;\,+\infty[$.**

   - La fonction f est définie sur $[2\,;\,+\infty[$ donc continue et dérivable sur cet intervalle car c'est une fonction polynôme.
   - Pour tout réel x de $[2\,;\,+\infty[$ on a $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$ donc :

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 3 \times 2x - 5 = \underline{-x^2 + 6x - 5}$$

- Cas général sur $\mathbb{R}$: étude de $x \longmapsto -x^2+6x-5$ sur $\mathbb{R}$ (on ne la nomme pas).
  La fonction $x \longmapsto -x^2+6x-5$ une fonction polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+c avec :

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=6 \\ c=-5 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 16 > 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6+\sqrt{16}}{-2} = 1 \notin [2\,;+\infty[\\ x_2 = \dfrac{-6-\sqrt{16}}{-2} = 5 \in [2\,;+\infty[\end{cases}$$

  Le discriminant étant positif strictement, le trinôme $(-x^2+6x-5)$ a deux deux racines réelles. Il est du signe de $a=-1<0$ soit négatif à l'extérieur des racines et positif ailleurs.

- Retour sur la dérivée sur $[2\,;+\infty[$. La dérivée f' est donc positive de 2 à 5 et négative ailleurs soit le tableau de variations suivant :

x	2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(2)\approx 14.3$	$\nearrow$	$f(5)\approx 23.3$	$\searrow$	$-\infty$

2. **Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=10$.**

x	2		5		α		$+\infty$
Variations de f	$f(2)\approx 14.3$	$\nearrow$	$f(5)\approx 23.3$	$\searrow$	10	$\searrow$	$-\infty$

Méthode 1 (Nombre de solutions d'une équation et TVI)

On va appliquer le corolaire du TVI sur chaque intervalle où la fonction est monotone. On va essayer d'en éliminer certains qui ont un maximum ou un minimum qui permettent d'affirmer la non-existence de solution.

- Sur $[2\,;5]$.
  Sur l'intervalle $[2\,;5]$, la fonction f admet $f(2)\approx 14,3$ comme minimum. De ce fait, l'équation $f(x)=10$ n'admet pas de solution.

- Sur $[5\,;+\infty[$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$;
  - On a $k=10$ compris entre $f(5)\approx 23,3$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$.
- Bilan : sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=10$ admet donc une unique solution α.

3. Déterminer un encadrement et une valeur approchée de α au centième.

Méthode 2 (Encadrement et approximation de la solution d'une équation par balayage)

On cherche à encadrer α. On va utiliser la fonction ***TABLE*** de la calculatrice en partant de la borne inférieure de l'intervalle (ici on part de 5 sur $[5\,;\,8]$ par exemple). On réglera le ***PAS*** ou ***STEP*** progressivement sur 1, puis sur 0,1 et enfin sur 0,01 à l'aide du ***MENU TABLE SET*** afin d'affiner l'encadrement mais on ne présente sur sa copie que l'encadrement final demandé.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcr} f(7,20) & \approx & 10,104 > 10 \\ f(7,21) & \approx & 9,97 < 10 \end{array}\right|$, donc $\boxed{7,20 < \alpha < 7,21}$.

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\underline{\alpha \approx 7,20}$ (ou $\underline{\alpha \approx 7,21}$).

Exercices

Exercice 1

$$f : \left\{\begin{array}{rcl} [0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 1 \end{array}\right.$$

1. Montrer rapidement que f est continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 40$.
4. Donner une valeur approchée de la (ou des) solution(s) au centième.
5. **Avec une suite.**
   Soit (u_n) la suite définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   Démontrer par récurrence que pour n entier, $8 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.
   En déduire que la suite (u_n) est croissante.
6. **Une égalité.**
   On note α la solution de l'équation $f(x) = 40$ de la question (4.).
   Montrer que α vérifie l'égalité :
   $$\alpha^3 = 12\alpha^2 - 36\alpha + 117$$

Exercice 2 *Avec une fonction auxiliaire*

On cherche à étudier la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. a. Dresser le tableau de variations de g (justifier).

1. b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α , et déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.

1. c. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

2. Justifier que f est dérivable sur $]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3. En déduire les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Complément.

4. a. Montrer que α vérifie l'égalité :

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$

4. b. On suppose que $2 < \alpha < 3$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.