Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°1 de mathématiques** **Term - ME**
17/10/22

Thème : Calcul algébrique et polynômes dans $\mathbb{C}$

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Exercice 1
Soit l'équation suivante : $z^2 + (1 - 4i)z - 3 - 3i = 0$.
1. Montrer que $-1 + i$ est une racine de cette équation.
2. En factorisant, trouver l'autre racine.

Exercice 2
On considère la suite de nombres complexes (z_n), définie par $z_0 = 1 - i$ et pour tout entier naturel, $z_{n+1} = (1 + i)z_n$.
1. Déterminer z_1 et z_2.
2. Démontrer que pour tout nombre complexe z, $z \times \bar{z}$ est un nombre réel.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = z_n \times \overline{z_n}$.
   a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}$.
   c) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
   d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis déterminer sa limite.

Exercice 3
On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + (1 + i)z^2 + (\mathrm{i} - 1)z - \mathrm{i}$.
1. Rechercher une racine imaginaire pure de P sous la forme ai.
2. Déterminer a, b et c tels que $P(z) = (z - ai)(az^2 + bz + c)$.

Exercice 4
Soit $P(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 2z + 2$.
1. Montrer que $P(z)$ peut s'écrire comme produit de deux polynômes du 2nd degré dont on admet que l'un est $z^2 + 2$.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

Exercice 5
1. **a)** Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $z^4 - 1$.
   b) Résoudre l'équation $z^4 - 1 = 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{z+2+i}{2z-1}\right)^4 = 1$.

Exercice 6
1. Développer pour tout réel x, $(x - 2i)^4$.
2. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le nombre complexe $(x - 2i)^4$ est réel.

BONUS !

1. Déterminer les racines carrées de $-3+4i$.
2. Résoudre $iz^2+(4i-3)z+i=5$.
3. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Barème indicatif **<u>Ex 1</u> : 2** **<u>Ex 2</u> : 4** **<u>Ex 3</u> : 4** **<u>Ex 4</u> : 3** **<u>Ex 5</u> : 4** **<u>Ex 6</u> : 2** **Bonus : 3**