Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°1 de mathématiques** **Term – Spé**

Rattrapage

Thème : Suites

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}+\left(\frac{7}{6}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n-1}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(1-n^3)$

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n=\frac{2(-1)^n}{n^2}$.

En encadrant u_n au préalable, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Choisir la bonne réponse **sans justifier.**

On considère une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n, on a : $n<u_n<n+1$.

A. Il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ; **B.** La suite (u_n) est croissante ;

C. La suite (u_n) est convergente ; **D.** La suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 2

Soit la suite (u_n) definie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=a$ où $a\in]-1\,;0[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n^2+u_n$.

1. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. a) Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$.

b) En déduire que pour tout $x\in]-1\,;0[$, $f(x)\in]-1\,;0[$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $-1<u_n<0$.

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite l si elle en a une.

Exercice 3

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=ku_n(1-u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

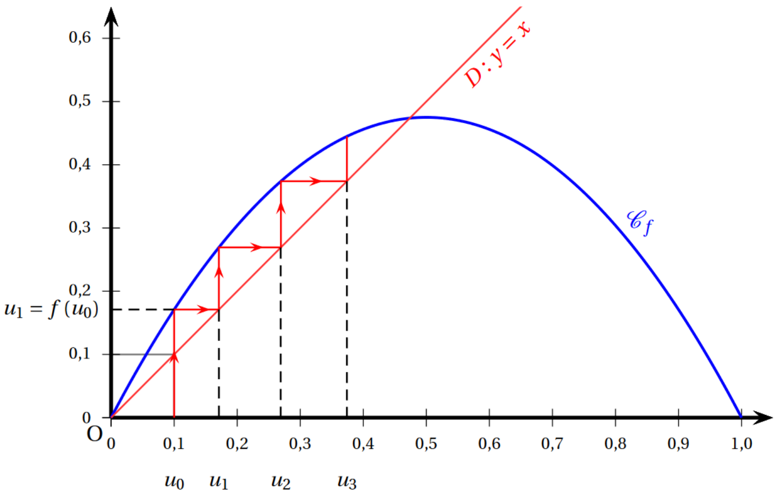
Partie 1

Dans cette partie, $k=1{,}9$ et $u_0=0{,}1$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}9u_n(1-u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=1{,}9x(1-x)$.
   - **a.** Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.
   - **b.** En déduire que si $x\in[0\,;1]$ alors $f(x)\in[0\,;1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y=x$.

   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python `algo (p)` où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
    u = 1/2*u*(1 - u)
    n = n+1
   return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$, et pour tout entier naturel n, $3u_{n+1} = u_n + 4$. On admettra que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n \geq 2}$

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 2$.
   a) Démontrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et déterminer son 1^er^ terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
   c) Retrouver la limite de (u_n) trouvée à la question **2.** à l'aide de l'expression de u_n précédente

BONUS !

On considère la suite de terme général $v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$.

Démontrer que $\frac{n}{n+1} \leq v_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$. Puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Barème indicatif **Ex 1 : 4.5** **Ex 2 : 5** **Ex 3 : 5** **Ex 4 : 5.5** **Bonus : 2.5**