A rendre pour le 07/11/22

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés. La note non prise en compte dans la moyenne mais apparaissant dans votre bulletin est un indicateur qui peut vous être favorable dans l'appréciation générale du trimestre.

Notion de suites adjacentes

Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que :
(i) l'une est croissante ;
(ii) l'autre est décroissante ;
(iii) la suite $(u_n - v_n)$ (ou $(v_n - u_n)$) converge vers 0.
Dans ce cas, on pourra en conclure que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent et ont même limite.

Exercices

Exercice 1
Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
Démontrer que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

Exercice 2
Soit deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ avec $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.
Démontrer que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. *On pourra montrer que $u_n \geq v_n$.*

Exercice 3
Soit deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout n entier naturel non nul par :
$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.
1. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.