Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble définition.

2. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. **a)** Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2e^{2x}$

b. $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$.

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

b. est monotone sur $]0\ ;\ +\infty[$

c. admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$.

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 **d.** e^{2x}.

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$

b. est convexe $]0\ ;\ +\infty[$

c. est concave sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$

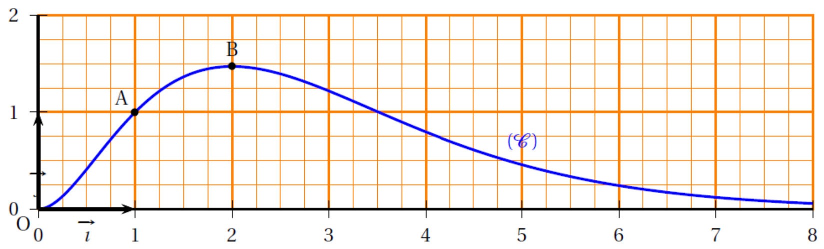
d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion.

Exercice 3

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ à valeurs strictement positives sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On sait que :

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$.
- La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O, A et B.

- Le point A a pour coordonnées $(1\,;\,1)$; la droite (OA) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
- Le point B a pour coordonnées $\left(2\,;\,\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)$. Au point B, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.



PARTIE A

1. **a.** Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis $f'(1)$ et $f'(2)$ (justifier les résultats).

   b. Montrer que, dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions dont l'une est le nombre 1 ; l'autre solution est notée α.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\ln[f(x)]$.
   Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2\times \mathrm{e}^{-x+1}.$$

1. On rappelle que la fonction g est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $g(x)=\ln[f(x)]$.

   a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $g(x)=-x+1+2\ln x$.

   b. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa fonction dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Retrouver, par le calcul, le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Soit la fonction dérivable h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x)=\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

   a. On note h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
   $f(x)=-h'(x)$.
   En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 4

Etudier la convexité de la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x)=0{,}25x^4-x^3+5x^2-4$.

Corr ex 2

1. f est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   On a $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} \times x - 1 \times \mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$. Réponse **c.**

2. Comme sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$.

   $f'(x) = 0 \iff 2x-1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;

   - $f'(x) < 0 \iff 2x-1 < 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$;
   - $f'(x) > 0 \iff 2x-1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$;

   Conclusion : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est le minimum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$. Réponse **c.**

3. On a $f(x) = 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}$.

   En posant $X = 2x$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$.

   On sait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: Réponse **a.**

4. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^3 > 0$ et $2\mathrm{e}^{2x} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui du trinôme $2x^2 - 2x + 1$.

   Or $2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right.$.

   Donc $f''(x)$ somme de deux nombres positifs est positive sur $]0\,;\,+\infty$. La fonction est donc convexe sur $]0\,;\,+\infty[$. : Réponse **b.**

Corr ex 3

Partie A

1. **a.** • L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   • La droite (OA) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A, donc son coefficient directeur est égal à $\dfrac{1-0}{1-0} = 1$; $f'(1) = 1$.

   • Au point B, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc $f'(2) = 0$.

   b. • La fonction est croissante sur $]0; 2]$ de 0 à $\dfrac{4}{\mathrm{e}} > 1$: la fonction étant continue sur cet intervalle il existe donc $x \in]0\,;\,2]$ tel que $f(x) = 1$; or A a pour coordonnées $(1; 1)$, donc $f(1) = 1$: 1 est une solution de l'équation.

   • La fonction est décroissante sur $]2\,;\,+\infty[$ de $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$ à 0 : la fonction étant continue il existe donc $\alpha \in]2\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1$.

   L'équation admet donc deux solutions.

2. La fonction logarithme népérien étant croissante sur son intervalle de définition les variations de g sont les mêmes que celles de f soit croissante sur $]0\,;\,2]$ et décroissante sur $]2\,;\,+\infty[$.

Partie B

$$f(x) = x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}.$$

1. **a.** Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = \ln[f(x)] = \ln\left(x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}\right) = \ln x^2 + \ln\left(\mathrm{e}^{-x+1}\right) = 2\ln x + (-x+1) = -x+1+2\ln x$

   b. On sait que si la fonction u est dérivable $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, donc ici :

   $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2x\mathrm{e}^{-x+1} - x^2\mathrm{e}^{-x+1}}{x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}} = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x+1}(2-x)}{x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}} = \dfrac{2-x}{x}$.

   Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc celui du numérateur $2-x$. On retrouve que :

   • $2-x > 0 \iff 2 > x \iff 0 < x < 2$: sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, $g'(x) > 0$, la fonction g est strictement croissante.

   • $2-x < 0 \iff 2 < x \iff x > 2$: sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$, $g'(x) < 0$, la fonction g est strictement décroissante.

2. $$h(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right) \times \mathrm{e}^{-x+1}.$$

   a. La fonction h est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $h'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \left(x^2 + 2x + 2\right) \times \mathrm{e}^{-x+1} = \mathrm{e}^{-x+1}\left(2x + 2 - x^2 - 2x - 2\right) = -x^2\mathrm{e}^{-x+1}$.

   b. On a $h'(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x+1} \iff h'(x) = -\left[x^2\mathrm{e}^{-x+1}\right] = -f(x) \iff f(x) = -h'(x)$.
   Donc une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$ est la fonction
   $-h(x) = -\left(x^2 + 2x + 2\right) \times \mathrm{e}^{-x+1}$.

Corr ex 2