1. • $u_1 = \dfrac{3\times 16+2\times 5}{5} = \dfrac{58}{5}$;
   • $v_1 = \dfrac{16+5}{2} = \dfrac{21}{2}$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
   a. On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
   $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{3u_n+2v_n}{5} - \dfrac{u_n+v_n}{2} = \dfrac{6u_n+4v_n-5u_n-5v_n}{10} = \dfrac{u_n-v_n}{10} = \dfrac{w_n}{10}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $w_{n+1} = \dfrac{1}{10}w_n$ montre que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 16-5 = 11$.
   On sait qu'alors pour tout naturel n, $\quad w_n = 11\times(0,1)^n$.
   b. Comme $0,1>0 \Rightarrow 0,1^n>0$ et $11>0$, donc la suite (w_n) est une suite de nombres supérieurs à zéro.
   D'autre part $0<0,1<1$ entraine que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,1^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.
3. **a.** Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{3u_n+2v_n}{5} - u_n = \dfrac{3u_n+2v_n}{5} - \dfrac{5u_n}{u_n} = \dfrac{-2u_n+2v_n}{5} = -\dfrac{2}{5}(u_n-v_n) = -\dfrac{2}{5}w_n = -\dfrac{4}{10}w_n = -0,4w_n$
   b. On a vu à la question 2. b. que $w_n>0$, quel que soit le naturel n, donc $-0,4w_n<0$ et par conséquent :
   $u_{n+1}-u_n<0 \iff u_{n+1}<u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.
   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $\ v_n \geqslant v_0 = 5$.
   c. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
   Initialisation : On a $u_0 = 16 \geqslant 5$: la proposition est vraie au rang $n=0$.
   Hérédité : on suppose que pour $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 5$.
   On a donc $3u_n \geqslant 15$ (1) et comme on a admis que $v_n \geqslant 5$, on a $2v_n \geqslant 10$ (2).
   On peut ajouter membre à membre (1) et (2) pour obtenir :
   $3u_n+2v_n \geqslant 25$ d'où en multipliant par le nombre positif $\dfrac{1}{5}$:
   $\dfrac{3u_n+2v_n}{5} \geqslant 5$ et finalement $u_{n+1} \geqslant 5$.
   Conclusion : la minoration par 5 est vraie au rang 0 et si elle vraie au tang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $\ u_n \geqslant 5$.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 5 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 5$.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. **a.** On a vu à la question 2.b. que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ ou encore que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n) = 0$.
   Les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et donc que $\ell = \ell'$.
   b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n+4v_n$.
   Donc : $c_{n+1} = 5u_{n+1}+4v_{n+1} = 3u_n+2v_n+2(u_n+v_n) = 3u_n+2v_n+2u_n+2v_n$
   $= 5u_n+4v_n = c_n$.
   Donc la suite (c_n) est constante.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n = c_0 = 5u_0+4v_0 = 5\times16+4\times5 = 80+20 = 100$.
   c. Puisque $c_n = 5u_n+4v_n$ et que (u_n) et (v_n) ont même limite ℓ, on a donc :
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} 100 = 100 = 5\ell+4\ell = 9\ell$.
   $9\ell = 100$ donc $\ell = \dfrac{100}{9}$.