Dans tous les exercices (sauf indication contraire), on se placera dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\ , \vec{k})$ de l'espace.

Exercice 1

On définit les points $A(4\,;1\,;5)$, $B(7\,;\ -1\,;10)$ et $C(8\,;0\,;8)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC).

3. Déterminer la distance du point $D(10\,;3\,;\ -7)$ au plan (ABC).

Exercice 2

On définit les points $A(3\,;-2\,;2)$, $B(6\,;\ 1\,;5)$ et $C(6\,;-2\,;-1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2. Soit $D(0\,;4\,;\ -1)$. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.

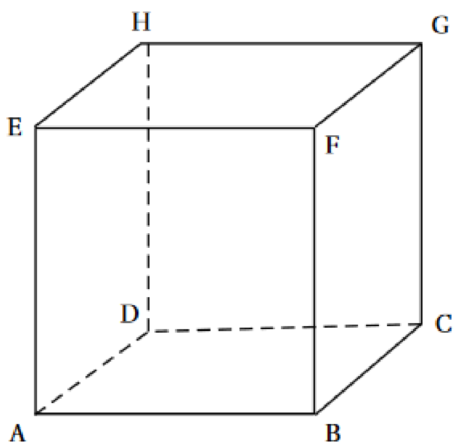
4. Montrer que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.

5. Calculer l'aire du triangle BDC.

6. En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Exercice 3 *D'après BAC*

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



Dans tout l'exercice, l'espace sera rapporté au repère orthonormé $(D\ ;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\ , \overrightarrow{DH})$. On note K le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A

1. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

2. Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment [HG].
On note $m = \mathrm{H}M$ (m est donc un réel appartenant à $[0; 1]$).

1. Montrer que, pour tout réel m de l'intervalle [0 ; 1], le volume du tétraèdre EMFD, en unité de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2. Montrer que le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1+m \\ 1 \\ -m \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MFD).

3. On note d_m la distance du point E au plan $(M\text{FD})$.

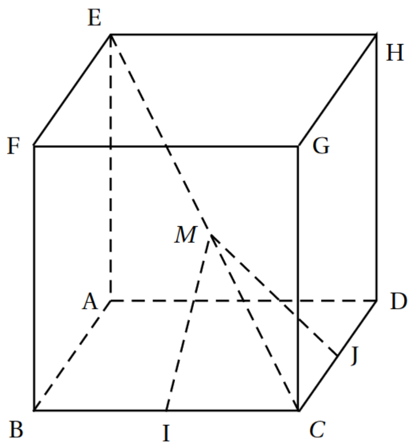
   a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,
   $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$.

   b. Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.

   c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan $(M\text{FD})$.

Exercice 4 *D'après BAC*

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\,;\,1-t\,;\,t)$.

2. Démontrer que le triangle MIJ est isocèle en M.

3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale. On désigne par θ la mesure de cet angle.
   On admet que la mesure de $\theta \in [0\,;\,\pi]$ et que la mesure θ est maximale lorsque le $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

   a. Démontrer que la mesure θ est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

   b. Etudier les variations de la fonction $f : t \longmapsto 3t^2 - t + \frac{1}{4}$ sur [0 ; 1].

   c. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.

Exercice 5 *D'après BAC métropole 2022*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.
   b. Montrer que le point B(−1 ; 3 ; 0) appartient à la droite $\mathscr{D}$.
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.
2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.
   a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.
   b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{19}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.
   c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.
3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.
   On rappelle que le point B(−1 ; 3 ; 0) appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.
   a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.
   b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.
   c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

Exercice 6 *D'après BAC*

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2\,;\,0\,;\,3),\ B(0\,;\,2\,;\,1),\ C(-1\,;\,-1\,;\,2) \text{ et } D(3\,;\,-3\,;\,-1).$$

1. **Calcul d'un angle**
   a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Calculer les longueurs AB et AC.
   c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.
2. **Calcul d'une aire**
   a. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$
   d. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. **Calcul d'un volume**
   a. Soit le point F(1 ; −1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
   b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
   c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.