GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE ET ORTHOGONALITE   Term

I Produit scalaire dans l'espace

1.1 Définitions

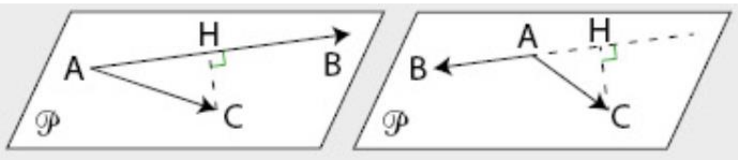
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan P contenant les points A, B et C.

Définitions (i) Le produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.
(ii) Le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$, noté $\boldsymbol{\vec{u}^2}$ est le produit scalaire $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{u}}$.

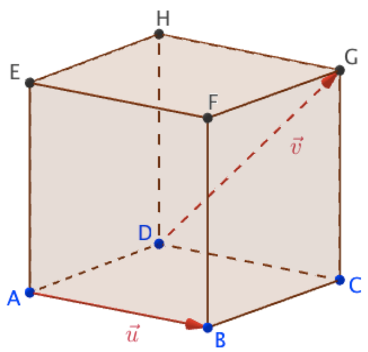
Remarques
1) $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est un vecteur nul.
2) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.
3) $\vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

Propriété Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors :

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$$



Exemple



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$

$= AB \times AB = 1.$

1.2 Propriétés algébriques

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et α un nombre réel.

Propriété $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v}$ ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriétés (i) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (ii) $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) = (\alpha\vec{u}).\vec{v}$ (iii) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Exemple
Reprenons le cube ABCDEFGH précédent.
[redacted] $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GF}$.
Or, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GF}$. EFGH est un carré donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GF} = 0$.
De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} = 1$ [redacted] donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF} = 1 + 0 = 1$.

Propriétés *Identités de polarisation*
(i) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ (ii) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Démonstrations
Ces formules se déduisent immédiatement des développements de $(\vec{u}+\vec{v})^2$ et $(\vec{u}-\vec{v})^2$.

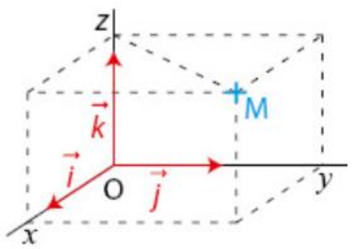
Propriétés (i) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ (ii) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Démonstrations
Ces formules se déduisent immédiatement des propriétés précédentes.

Remarque
En particulier, pour trois points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

1.3 Base orthonormée – Repère orthonormé – Expression analytique du produit scalaire

Définitions (i) Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormée si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de même norme unitaire ($\|\vec{\imath}\| = 1$, $\|\vec{\jmath}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$).
(ii) Un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormé**,** si sa base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée.



Dans ce qui suit, on se place dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

Propriétés Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
Et en particulier, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démonstration
$\vec{u}.\vec{v} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}).(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k})$

$$= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + xz'\vec{\imath}.\vec{k} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath} + yz'\vec{\jmath}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{\imath} + xy'\vec{k}.\vec{\jmath} + zz'\vec{k}.\vec{k} = xx' + yy' + zz'$$

En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$: $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|^2 = 1$, $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\jmath}\|^2 = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$

On a en particulier : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors, $\vec{u}.\vec{v} = 3$.

Déterminons l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \Leftrightarrow \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{3}{7\sqrt{6}}$

donc $(\vec{u}\,;\vec{v}) \approx 79{,}92$ °.

Propriété Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$.

La distance AB est donnée par la formule, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Démonstration

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et donc $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple

Soit $A(-1\,;5\,;3)$ et $B(9\,;5\,;-2)$. $AB = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

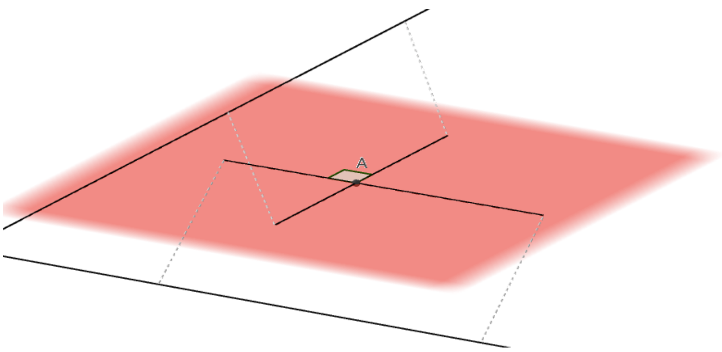
Exercice 1

On considère les points $A(0\,;-5\,;0)$, $B(1\,;0\,;1)$ et $C(a\,;0\,;-1)$ où a est un réel. Donner la valeur de a telle que le triangle ABC soit rectangle en B.

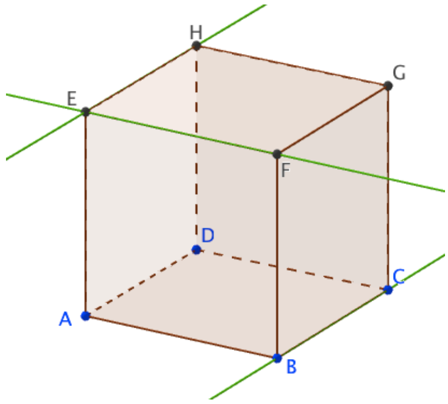
II Orthogonalité dans l'espace

2.1 Orthogonalité de deux droites, orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



Exemple
Dans le cube ABCDEFGH, les droites (BF) et (EH) sont orthogonales car la parallèle (BC) à (EH) est perpendiculaire en B à la droite (BF).



Remarques
1) Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
2) Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

Propriété Deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonales si, et seulement si $\vec{u}.\vec{u}' = 0$.

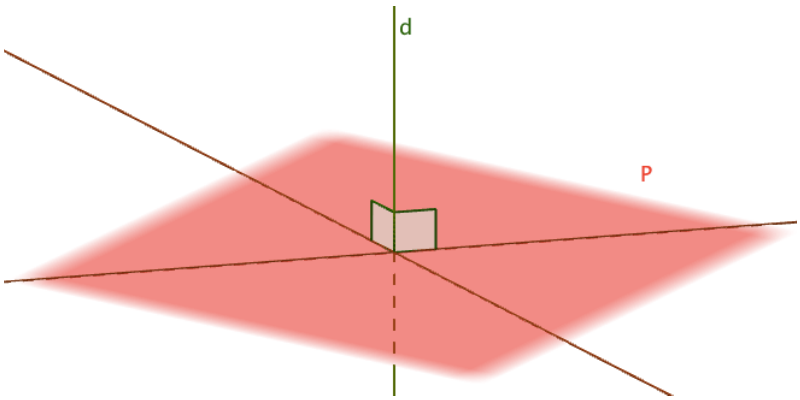
Démonstration en exercice

Exemples
Soit le cube ABCDEFGH ci-dessus.
On a $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BC} = 0$ car (BF) perpendiculaire à (BC).
On a $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{EH} = 0$ car (BF) perpendiculaire à (EH).

Définition Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété Une droite d est orthogonale à un plan P si, et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de P.

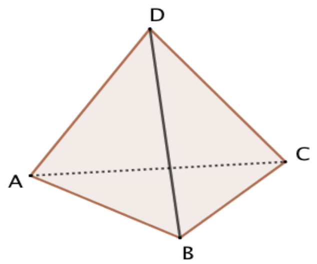
Démonstration en exercice



Remarque
La propriété précédente peut de traduire de la façon suivante : une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à un plan P ssi il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ tels que $\vec{u}.\vec{n} = 0$ et $\vec{u}'.\vec{n} = 0$.

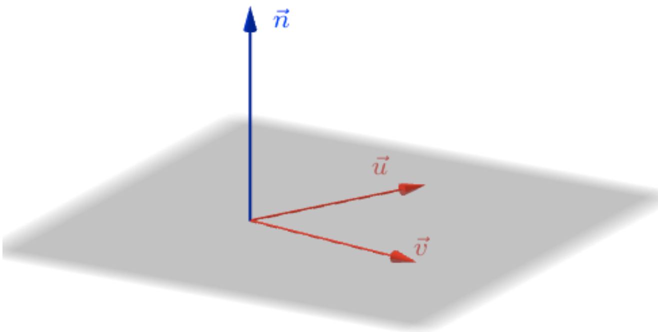
Exemple
Soit ABCDEFGH le cube de l'exemple du haut de la page. (AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB). (AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC). Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

Exercice 2
Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur l.
Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

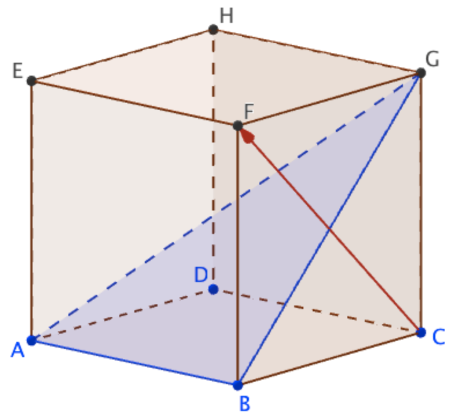


2.2 Vecteur normal à un plan

Définition On appelle vecteur normal à un plan P dirigé par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$, tout vecteur $\vec{n}$ non nul, orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Exemple
Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-contre. On considère le repère $\left(B\,;\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$. Dans ce repère :
$A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;0\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$, $F(0\,;0\,;1)$, $G(0\,;1\,;1)$. On a ainsi :
$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc :
$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG} = 0\times 0 - 1\times 1 + 1\times 1 = 0$ et $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0\times(-1) - 1\times 0 + 1\times 0 = 0$.
Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).



Propriété Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Conséquence
Un plan est défini par la donnée d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{n}$ du plan. On note $\mathcal{P}(A\,;\,\vec{n})$.

Exemple *Méthode de détermination d'un vecteur normal*
Dans un repère orthonormé, soit $A(1\,;2\,;\,-2)$, $B(-1\,;3\,;1)$ et $C(2\,;0\,;\,-2)$ trois points de l'espace.
Déterminons un vecteur normal au plan (ABC).
On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$. Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal au plan (ABC). Il est tel que :
$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$ soit $\begin{cases}-2a + b + 3c = 0\\ a - 2b = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\times 2b + b + 3c = 0\\ a = 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3b + 3c = 0\\ a = 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c = b\\ a = 2b\end{cases}$

Prenons par exemple, $b = 1$ (**arbitrairement choisi**) alors $c = 1$ et $a = 2$.

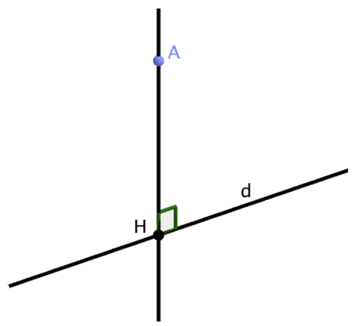
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ABC).

Remarque

La solution n'est pas unique, tout vecteur colinéaire à $\vec{\boldsymbol{n}}$ est solution.

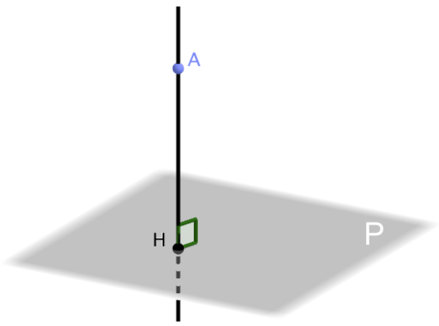
2.3 Projections orthogonales dans l'espace

Définition Soit A un point et une droite d de l'espace.
La projeté orthogonal de A sur d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.



Propriété Soit A un point et une droite d de l'espace.
La projeté orthogonal de A sur d est le point de d le plus proche de A.

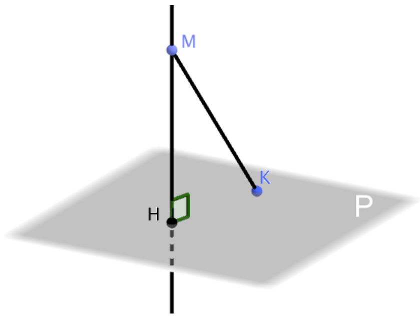
Définition Soit A un point et un plan P de l'espace.
Le projeté orthogonal de A sur P est le point H appartenant au plan P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.



Propriété Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

Démonstration à lire et comprendre

Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan P. Supposons qu'il existe un point K du plan P plus proche de M que l'est le point H. $KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M. Donc $KM^2 \leq HM^2$.
Or, (MH) est orthogonale à P, donc (MH) est orthogonale à toute droite de P.
En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK).
Le triangle MHK est donc rectangle en H. D'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$ .Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$. Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H. On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point M.



Propriété *Distance d'un point à un plan*
Soit A un point et un plan P de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$.

La distance du point A au plan P est donnée par **:** $\boldsymbol{d(A\,,P) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = AH}$ pour tout point M du plan P, avec H projeté orthogonal de A sur P

Démonstration page 100 de votre manuel

Exemple
Soit $A(1\,;2\,;\,-2)$, $B(-1\,;3\,;1)$ et $C(2\,;0\,;\,-2)$ les trois points de l'espace déjà définis dans l'exemple de la page 5.
Soit $S(-2\,;1\,;0)$ (ce point n'appartient pas au plan (ABC)).
Tout d'abord, on a : $d(S\,,(ABC)) = \frac{|\overrightarrow{SA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
On a vu que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC). D'où $\|\vec{n}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$
On a $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et donc $|\overrightarrow{SA}.\vec{n}| = |6+1-2| = 5$.
Donc $d(S\,,(ABC)) = \frac{|\overrightarrow{SA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{5}{\sqrt{6}}u.l \approx 2{,}04$ u.l.
On aura bien sûr $d(S\,,(ABC)) = \frac{|\overrightarrow{SB}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\overrightarrow{SC}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{5}{\sqrt{6}}$ u.l.

III Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Dans ce qui suit, on se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace.

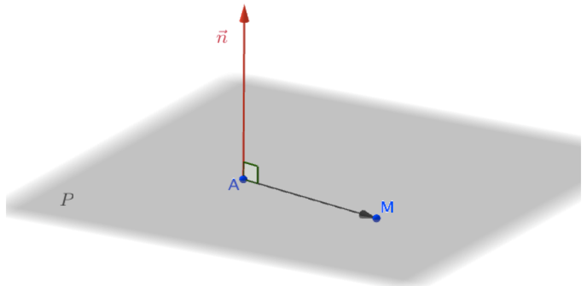
3.1 Equations cartésiennes d'un plan

Théorème Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme

$ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan.

Démonstration **à connaître**

- Soit un point $A(x_A\,;y_A;z_A)$ de P.



$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$ avec $d=-ax_A-by_A-cz_A$

- Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).

On note E l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$

Alors le point $A\left(-\frac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ vérifie l'équation $ax+by+cz+d=0$. Et donc $A \in$ E.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Pour tout point $M(x\,;y\,;z)$, on a :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x+\frac{d}{a}\right)+b(y-0)+c(z-0) = ax+by+cz+d=0.$

E est donc l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (d'après la propriété de la page 5).

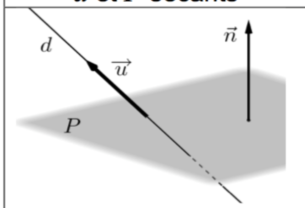
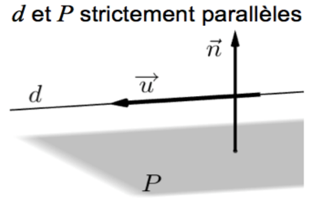
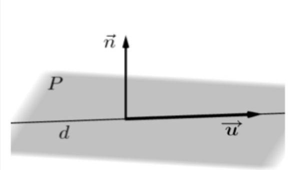
Exemples

1) Le plan d'équation cartésienne $x-y+5z+1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$.

2) Soit P le plan passant par le point $A(1\,;4\,;\,-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

a) $\vec{n}(2\,;-3\,;-1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $2x-3y-1z+d=0$.
De plus, le point E$(1\,;\,4\,;\,-2)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ donc $2\times1-3\times4-1\times(-2)+d=0$ soit $-8+d=0$ et $d=8$.
Ainsi, $2x-3y-z+8=0$ est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

3.2 <u>Positions relatives</u>

Positions relatives - Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ - Plan P de vecteur normal $\vec{n}$	d et P sécants	d et P parallèles	
		d et P strictement parallèles	d incluse dans P
			
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u}.\vec{n}\neq 0$	$\vec{u}.\vec{n}=0$	

Si $A \in P$ et $A \in d$.

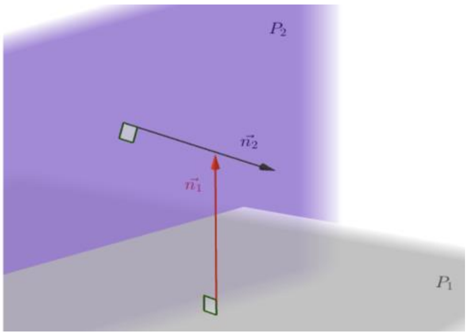
$d \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

Exemple

Soit la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases}x=-1+t\\y=2-2t\\z=-1-t\end{cases}$ et P le plan d'équation cartésienne $3x+y+z+2=0$. Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. On a :

$\vec{u}.\vec{n}=3-2-1=0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux soit d parallèle à P. $A \in P$ et $A \in d$. Donc d est incluse dans P.

Propriétés Soit P_1 et P_2 deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
(i) P_1 et P_2 sont parallèles ssi $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires.
(ii) P_1 et P_2 sont perpendiculaires ssi $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.



Exemple
Soit $P_1 :\ -x+2y+z+2=0$ et $P_2 : \frac{1}{2}x-y-\frac{1}{2}z-1=0$. Alors, ces deux plans dont parallèles puisque leurs vecteurs normaux sont colinéaires : $\overrightarrow{n_2}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{n_1}$.

3.3 Détermination des coordonnées de projetés orthogonaux

Propriétés Soit Δ une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=x_B+at \\ y=y_B+bt \\ z=z_B+ct \end{cases}, t\in\mathbb{R}$, A un point de l'espace et $H(x_H\,;y_H\,;z_H)$ le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ ; alors :
(i) le plan P passant par A et orthogonal à la droite Δ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ où d est un nombre réel ;
(ii) le triplet $(x_H\,;y_H\,;\ z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois la représentation paramétrique de Δ et l'équation cartésienne du plan P.

Exemple
On considère la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et $A(1\,;-2\,;0)$ un point de l'espace.
Une équation cartésienne de P est donc de la forme : $2x+y-z+d=0$. Et $2-2+d=0 \Leftrightarrow e=0$. Donc P : $2x+y-z=0$. Résolvons le système suivant (car H est le point d'intersection entre Δ et P) : $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$-2+4t+2+t+2+t=0 \Leftrightarrow 2+6t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$. En remplaçant t dans la représentation paramétrique de d, on obtient $H\left(-\frac{5}{3}\,;\frac{5}{3}\,;\ -\frac{5}{3}\right)$ projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

Propriétés Soit P un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ où d est un nombre réel, $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $H(x_H;y_H;z_H)$ le projeté orthogonal du point A sur le plan P; alors :
(i) la droite Δ passant par A et orthogonal au plan P admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt, t\in\mathbb{R} \\ z=z_A+ct \end{cases}$
(ii) le triplet $(x_H\,;y_H\,;\ z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois l'équation cartésienne du plan P et la représentation paramétrique de Δ .

Exemple
On considère le plan P d'équation $3x+y-z-2=0$ et $A(5\,;1\,;3)$ un point de l'espace.

Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$. On en déduit une représentation paramétrique de la droite orthogonale à P et passant par A : $\begin{cases}x=5+3t\\y=1+t\\z=3-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Résolvons le système suivant : $\begin{cases}x=5+3t\\y=1+t\\z=3-t\\3x+y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow t=-1$. On obtient $H(2\,;0\,;\,4)$ projeté orthogonal du point A sur le plan P.

Compléments : Equation d'une sphère – formulaire

La sphère de centre $\Omega(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de rayon R admet pour équation
$\boldsymbol{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$.

	Surface	Volume
Sphère	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
Tétraèdre et autres pyramides	Somme de la surface des faces	$\frac{base\ \times hauteur}{3}$
Cylindre	Surface du rectangle + 2 × surface du cercle	$\pi R^2 h$
Cône	πRL où R est le rayon du cercle et L la longueur d'une génératrice	$\frac{1}{3}\pi R^2 h$
Volume de révolution engendré par une fonction f tournant autour de l'axe (Ox)		$\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$

Exercice 3 – *D'après Bac*

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A(2 ; −1 ; 0) B(1 ; 0 ; −3), C(6 ; 6 ; 1) et E(1 ; 2 ; 4) ;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x-y-z+4=0$.

1. **a.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

2. **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) à à pour coordonnées $\left(4\,;\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide à ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

Solutions des exercices

Exercice 1

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}a\\5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}a-1\\0\\-2\end{pmatrix}$. D'où : $AB^2 = 1+25+1 = 27, AC^2 = a^2+25+1 = a^2+26$ et $BC^2 = (a-1)^2+4 = a^2-2a+5$. Pour que le triangle ABC soit rectangle en B, on doit avoir l'égalité (de Pythagore) suivante :

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ soit :

$27 + a^2 - 2a + 5 = a^2 + 26 \Leftrightarrow 32 - 26 = 2a \Leftrightarrow 6 = 2a \Leftrightarrow \boxed{a = 3}$.

Exercice 2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Dans le triangle équilatéral ABD, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} &= AD \times AB \times cos\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)\\ &= l \times l \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{l^2}{2}\end{aligned}$$

On démontre de même dans le triangle équilatéral ADC que :

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \frac{l^2}{2}$$

Ainsi : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux.

Les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales

Remarque Dans un tétraèdre régulier, deux arêtes quelconques opposés sont orthogonales.

Exercice 3

1. **a.** On veut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A; on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4+7-3 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

   b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 5-6+12 = 11$.

   $BA = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}$ et $BC = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{77}$

c. On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right) &\iff 11=\sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\ &\iff 11=\sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\ &\iff \cos\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

La calculatrice donne $\widehat{ABC}\approx 68°$ au degré près.

2. **a.** On veut démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.
De plus $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-1)-1\times1-1\times(-3)=-2-1+3=0$
et
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4-1\times7-1\times1=8-7-1=0$
$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$.
Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. On déduit une équation cartésienne du plan (ABC).
Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x-y-z+d=0$, comme A appartient à ce plan, on a : $5+d=0$ soit $d=-5$.
Une équation de (ABC) est donc $2x-y-z-5=0$.

c. On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.
Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{n}$
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D}\iff\overrightarrow{EM}=t\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&2t\\y-2&=&-t,\quad t\in\mathbb{R}\\z-4&=&-t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+2t\\y&=&2-t,\quad t\in\mathbb{R}.\\z&=&4-t\end{array}\right.$$

d. On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$.
H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=4-t\\2x-y-z-5=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=4-t\\2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=4-t\\6t-9=0\end{cases}\iff\begin{cases}t=\frac{3}{2}\\x=4\\y=\frac{1}{2}\\z=\frac{5}{2}\end{cases}$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
On va calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.
$AC=\sqrt{4^2+7^2+1^2}=\sqrt{66}$ et donc $\mathscr{B}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{11}\times\sqrt{66}}{2}=\frac{11\sqrt{6}}{2}$

HE est la hauteur de la pyramide et $\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}-3\\\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

On a par suite $HE=\sqrt{(-3)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{2}}$ puis
$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\frac{11\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{11\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}{3\times2\times\sqrt{2}}=\frac{33}{2}=16,5$