Exercice 1

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :
   a) $e^{2x} - 2e^{x} = 8$.
   b) $(\ln x)^2 + 4\ln x + 4 = 0$.
   c) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 = 0$
   d) $e^{2x} - 7e^{x} + 12 > 0$.
   e) $e^{2x} + e^{x} - 6 > 0$.
2. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres réels suivants :
   $A = 2\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
   $B = \ln\left(\frac{4}{9}\right) - \ln\left(\frac{3}{8}\right)$.
   $C = \frac{1}{5}\ln 32 - \frac{1}{3}\ln 27$.
   $D = \ln(e^{-1}) - \ln(\sqrt{e}) + \ln(e^2)$.
3. a) Démontrer pour tout $x > -1$ que $2\ln(x+1) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.
   b) Démontrer pour tout x réel que $\ln(e^{x} + 1) = x + \ln(1 + e^{-x})$.
   c) Démontrer pour tout x réel que $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = -\ln\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)$.

Exercice 2 *Suites et ln*

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.
   a) Montrer que $u_1 + u_2 + u_3 = -\ln 4$.
   b) On définit pour $n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3}(u_n)^2$. On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(\sqrt{3}u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) On définit pour $n \geq 0, W_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Exprimer W_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.
3. Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.
   a) Exprimer u_n en fonction de n, puis en déduire que la suite (v_n) est arithmétique.
   b) On définit pour $n \geq 0, T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Exprimer T_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
   c) Calculer la somme $P_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. En déduire la limite de la suite (P_n).

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes **après avoir déterminé leur ensemble de définition**

1. $\ln(x^2 - 2x + 5) = 0$.
2. $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$.
3. $\ln(4x - 2) + \ln 5 < 1 - \ln 2$.
4. $\ln x + \ln(2 - x) + \ln(x + 4) \geq \ln(5x)$.

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \ln x + \ln y = 25 \\ 2\ln x + \ln y = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ \ln(x^2) + \ln(y^2) = -\ln 4 \end{cases}$

Exercice 5

1. En 2017, la population mondiale était de 7,55 milliards. Elle augmente de 1,2 % par an environ. Si ce taux se maintient, en quelle année dépassera-t-elle 10 milliards ? 13 milliards ?
2. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute. Si sa masse initiale était de 1 kg, au bout de combien de temps est-elle inférieure à 1 g ?

Exercice 6

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$par $f(x) = \ln x - \frac{4}{x}$.
   a) Déterminer les limites de f sur son ensemble de définition.
   b) Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
   c) Donner l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en $x = e$.
   d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = (\ln x)^2 - 6\ln x + 5$.
   a) Déterminer les limites de g sur son ensemble de définition.
   b) Etudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations.
   c) Etudier le nombre de solutions de l'équation de $g(x) = 0$.
   d) Déterminer les solutions de cette équation.

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2 - 2x + 2)$

2. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{2+x^4\ln x}{x^2}$

3. . $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - \ln(x^2)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) - 2\ln x$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

Exercice 8

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f suivantes sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \frac{1}{x} - 2\ln x$.
2. $f(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
3. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)$.
4. $f(x) = \ln(2x^2 - 2x + 1) - 4x^2 + 2$.
5. $f(x) = \ln(\ln x)$.
6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$.

Exercice 9

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$ On note *C* la courbe de la fonction *f*.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f*.
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de *f*. Interpréter graphiquement.
3. Déterminer la dérivée de la fonction *f*.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction *f* au point d'abscisse 1.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.
6. Tracer la tangente, les asymptotes éventuelles puis la courbe *C* dans un repère orthonormal.

Exercice 10 *D'après BAC*

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.
2. Déterminer le tableau de variation de f. *On admettra que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels
Entrée	saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0
	Tant que $N - \ln(N^2 + A) < A$
	N prend la valeur $N + 1$
Sortie	Afficher N

a) Que fait cet algorithme ?

b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2+1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;1]$.
2. Etudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note l sa limite. En déduire la valeur de l.

Exercice 11 *D'après BAC*

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;1]$ par

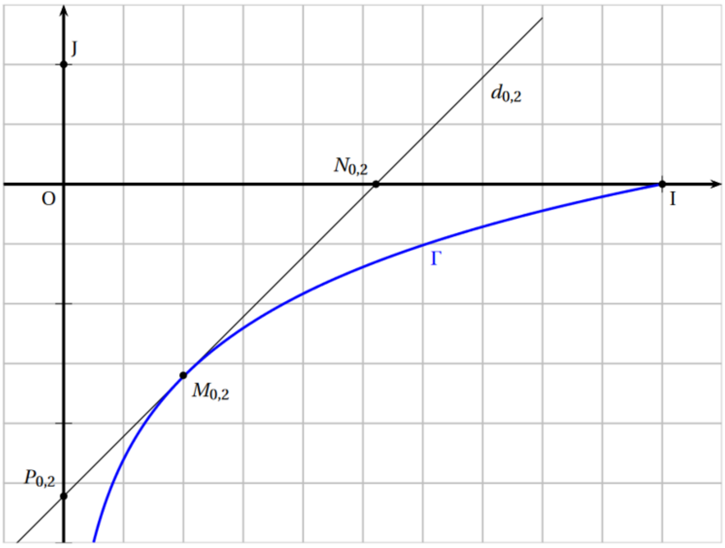
$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0;1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;1]$ par $g(x) = \ln x$.
Soit a un réel de l'intervalle $]0;1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.
On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0;1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure ci-dessous.



a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.
b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.
c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.
Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0;1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \frac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Exercice 12 *En radiothérapie*

Dans le traitement des tumeurs par irradiation, la proportion $f(x)$ de cellules cancéreuses résistant au traitement est fonction de la dose x d'exposition aux rayons. Lorsque chaque cellule présente deux points d'attaque, ou « cibles », cette fonction peut être décrite par : $f(x) = 1 - \left(1 - e^{-kx}\right)^2$, où k est la taille moyenne d'une cellule ($k > 0$).

1. Etudier la fonction f selon le plan suivant :
   a) valeur de $f(0)$ et limite de f en $+\infty$;
   b) calcul de $f'(x)$ et sens de variations ;
   c) courbe représentative C dans le cas $k = 1$.
2. Soit le point A de la courbe d'abscisse $\frac{1}{k}\ln 2$.
   a) Préciser l'ordonnée de A et déterminer une équation de la tangente T à C en A, sous la forme $y = g(x)$.
   Dans la suite, on étudie les positions relatives de C et T.
   b) On pose $h(x) = f(x) - g(x)$.

Calculer $h'(x)$, puis $h'\left(\frac{1}{k}\ln 2\right)$.

c) Etudier le sens de variations de h' sur $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire le signe de $h'(x)$.

d) Etudier alors le sens de variations de h, puis le signe de h. En déduire que C traverse sa tangente T au point A.

Exercice 13 *D'après BAC*

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.
À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

5. Étude de la convergence de la suite (u_n).

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
Montrer alors que $\frac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

Exercice 14 *La constante d'Euler $-\gamma$* *Vers la CPGE*

1. a) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$.
Déterminer son tableau de variation.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

2. a) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par :

   $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$.

   Déterminer son tableau de variation.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$.
3. Soit la suite (h_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq h_n$. *Indication : on pourra utiliser la question 1.b.*

   b) En déduire que la suite (h_n) diverge.
4. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   Montrer que (u_n) est décroissante. *Indication : on pourra utiliser la question 2.b.*
5. Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

   Montrer que (v_n) est croissante. *Indication : on pourra utiliser la question 1.b*
6. a) Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n$. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite notée γ.

   c) Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

Un peu d'histoire des mathématiques

Le nombre γ qui apparaît dans l'exercice précédent possède une paternité douteuse : certains attribuent sa découverte à Euler qui en calcule 16 décimales en 1734. Encore mal connu (on ignore toujours si γ est rationnel ou non) ce nombre intervient de façon surprenante dans plusieurs questions d'arithmétique. Citons-en une : « Pour tous les entiers compris entre 1 et n, le nombre moyen de diviseurs est très proche de $\ln n + 2\gamma - 1$ » (résultat prouvé par Dirichlet en 1838).