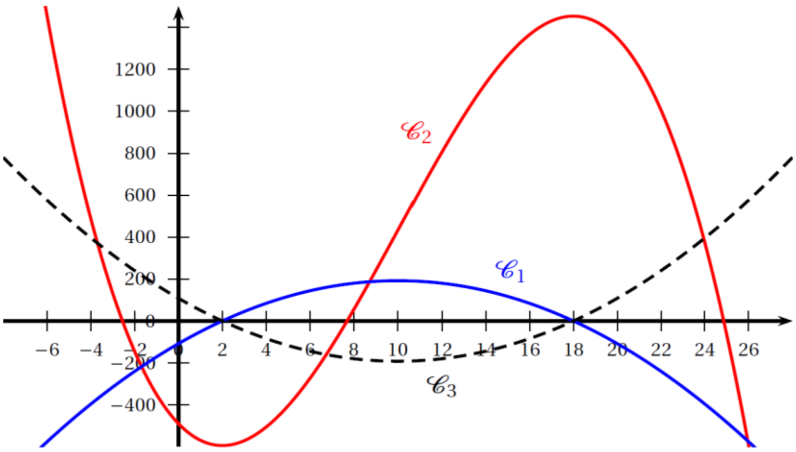
Exercice 1

Soit h la fonction définie sur $[0; 26]$ par

$$h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490.$$

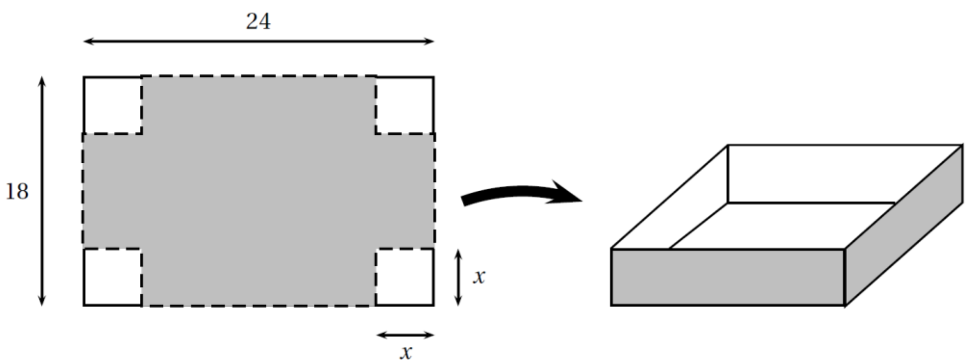
1. Soit h' la fonction dérivée de h.
   Exprimer $h'(x)$ en fonction de x.
2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et $\mathscr{C}'$ celle de h'.
   a. Identifier $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur le graphique orthogonal ci-dessous parmi les trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ proposées.
   b. Justifier le choix pour $\mathscr{C}'$.



3. Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0. Déterminer son équation réduite.
4. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h sur $[0; 26]$.

Exercice 2

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.

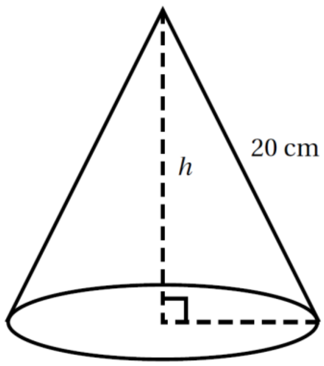


Le volume de la boîte ainsi obtenue est une fonction définie sur l'intervalle $[0; 9]$ notée $V(x)$.

1. Justifier que pour tout réel x appartenant à $[0;9]$: $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.
2. On note V' la fonction dérivée de V sur $[0;9]$.
   Donner l'expression de $V'(x)$ en fonction de x.
3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?
5. L'industriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm^3 ? Justifier.

Exercice 3

On considère un cône de révolution ayant une génératrice de longueur 20 cm et d'une hauteur h en cm.
On rappelle que le volume V en cm^3 d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 et de hauteur h en cm est : $V = \frac{1}{3}\mathscr{A}h$.
Dans cet exercice, on cherche la valeur de la hauteur h qui rend le volume du cône maximum.



1. Exprimer le rayon de la base en fonction de h.
2. Démontrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est :

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(400h - h^3\right).$$

3. Quelle hauteur h choisir pour que le volume du cône soit maximum ?

Exercice 4

Partie A

Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.
Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point de coordonnées (0 ; 3) à la droite T d'équation y = 4x + 3.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et (C sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2+1}$, α et β étant deux réels à déterminer.
2. Etudier les variations de f.
3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe C au point d'abscisse 0. Etudier la position relative de C par rapport à T.
5. Construire C et T.