APPLICATIONS DE LA DERIVATION — 1re

On a vu que la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse x est la droite la plus proche à la courbe de f au voisinage de x. Il est naturel de penser que lorsque la tangente « monte », la courbe « monte » et quel lorsque la tangente « descend », la courbe « descend », et réciproquement. Ou, plus mathématiquement, lorsque l'on considère une fonction affine f, sa courbe et sa tangente (en tout point) sont confondues. Or, la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur (de la tangente), ici $f'(x)$.
Ainsi, **étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.**

I Lien entre signe de la fonction dérivée et sens de variation

On admettra le théorème suivant qui est attribué à *Joseph-Louis Lagrange* :

Théorème Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I. On a les équivalences suivantes :
(i) Pour tout x de I, $f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur I.
(ii) Pour tout x de I, $f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante sur I.
(iii) Pour tout x de I, $f'(x) = 0 \iff f$ est constante sur I.

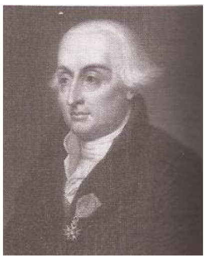
Remarque
On dit qu'une fonction est monotone sur un intervalle lorsqu'elle est partout croissante ou bien partout décroissante sur cet intervalle.

Exemple
Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 12x + 1$ qui est bien dérivables sur $\mathbb{R}$ (polynôme de degré 3) et pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$. Ainsi, $f'(x)$ est un trinôme dont les racines sont -2 et 2. Comme $a = 3 > 0$, on obtient le tableau de signes de $f'(x)$ que l'on complète par le tableau de variations de f par le théorème précédent :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	17	↘	-15	↗	

Remarques
1) Le théorème n'est valable que sur un intervalle : il faut donc découper l'étude sur chaque intervalle où $f'(x)$ est de signe constant. En particulier, dans l'exemple précédent, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty[$ mais on ne peut pas en déduire que f est croissante sur $]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty[$ qui est n'est pas un intervalle. Elle ne l'est pas puisque $f(-3) = 10 > -8 = f(3)$ bien que $-3 < 3$.
2) Dans le théorème précédent, si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout x de I, on dit que f est strictement croissante sur I (resp. décroissante). La réciproque est en revanche fausse : la fonction cube ($f(x) = x^3$) est strictement croissante mais $f'(0) = 0$. En fait, on a la propriété suivante :
Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout x de I et si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x alors f est strictement croissante (resp. décroissante).
Prendre la fonction $g : x \mapsto -3x^5 - 5x^3 + 1$. Soit $g'(x) = -15x^4 - 15x^2 = -15x^2(x^2 + 1) \leq 0$ pour tout x réel et $g'(0) = 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Histoire des mathématiques – Joseph Louis Lagrange



Giuseppe Luigi Lagrangia (1736 – 1813), né en Italie d'un père d'origine française, est le plus jeune d'une famille de 11 enfants. Sa passion pour l'astronomie et les mathématiques naît de la lecture d'un mémoire de l'astronome anglais Edmund Halley. Dès l'âge de 19 ans, il enseigne à l'Ecole d'Artillerie de Turin. Il publiera bientôt ses 1^{ers} résultats, entre en correspondance avec le mathématicien suisse Euler, et il est lauréat en 1764 du prix de l'Académie des sciences de Turin pour un mémoire sur la libration de la Lune (lente oscillation, réelle ou apparente, d'un satellite tel que vu depuis le corps céleste autour duquel il orbite). En 1766, Frederic le Grand souhaite que « le plus grand roi d'Europe ait à ses côtés le plus grand mathématicien d'Europe ». Lagrangia accepte l'invitation et se rend à Berlin où il sera élu à l'académie royale des sciences de Prusse, où il demeure jusqu'en 1787. Durant toute cette période, ses travaux scientifiques sont impressionnants, dans tous les domaines. A la mort du roi de Prusse, il est sollicité par Louis XVI, s'installe à Paris et francise son nom en Joseph Louis Lagrange. C'est là, qu'il publie son célèbre ouvrage *Mécanique analytique*, synthèse d'un siècle de recherches en mécanique et approche purement analytique du problème, sans aucune figure. A la Révolution, Lagrange participe au comité chargé de réformer les systèmes de poids et mesures et d'élaborer le système métrique. A partir de 1795, il enseigne dans la toute nouvelle Ecole Polytechnique et en 1795 à l'Ecole normale supérieure. Napoléon le récompense en le nommant sénateur et comte d'Empire. Il recevra la légion d'Honneur. C'est à Paris qu'il termine sa carrière et qu'il meurt en avril 1813. Il est enterré au Panthéon.

Lagrange, alors âgé de 19 ans, envoie à Euler, une lettre dans laquelle il résout le *problème isopérimétrique* (maximiser une aire pour un périmètre donné, c'est un problème d'optimisation très ancien qui remonte au IX^{e} siècle av-JC dû à la reine Didon). Euler est enthousiasmé par la méthode, beaucoup plus générale que la sienne : c'est la naissance du *calcul des variations*[1], terme introduit par Lagrange (où il s'agit, dit l'auteur « *de trouver les courbes qui jouissent de quelque propriété du maximum ou du minimum, […] [méthode appelée] d'après Euler, méthode des variations* »). Il utilise une méthode purement analytique pour résoudre des problèmes géométriques, méthode qui s'avère des plus fécondes et s'étend à de nombreux problèmes analogues.

Lagrange publie, en 1767, un mémoire sur l'*approximation des racines d'une équation algébrique par les fractions continues.* En 1770, il cherche à élucider les raisons pour lesquelles les solutions des équations du $3^{\text{ème}}$ degré s'expriment par radicaux. Par ailleurs, il conjecture que les équations du $5^{\text{ème}}$ degré ne sont pas résolubles par radicaux, mais il ne parvient pas à le démontrer.

Lagrange développe la théorie de l'analyse mathématique : notation $f'(x)$, équations différentielles, infinitésimaux, extremums…

On lui doit aussi d'importants travaux en physique, d'abord sur la propagation du son et la théorie des cordes vibrantes mais surtout en *mécanique céleste*. Il étudie en 1764, les librations de la Lune, en 1766 les mouvements de Jupiter et en 1780 les trajectoires des comètes. Dans un travail sur le mouvement de rotation d'un solide, il met en œuvre une technique qui annonce le *calcul matriciel* (vu en option maths expertes).

L'œuvre de Lagrange, parfois méconnue, constitue une étape entre le bouillonnement souvent désordonné d'Euler et de son temps, et la rigueur propre au siècle suivant : les prémices des grands développements des mathématiques du XIX^{e} siècle s'inscrivent en filigrane dans ses travaux.

Œuvres

- Réflexions sur la résolution algébrique des équations (1770)
- Mécanique analytique (1788)
- Théorie analytique des fonctions (1797)
- Leçons sur le calcul des fonctions (1804)

[1] Le *calcul des variations* traite des problèmes du type : Une fonction g étant donnée, trouver une fonction y en x telle que l'intégrale $\int_a^b g(x,y)\,dx$ (notion vue en terminale) est maximale.

Exercice 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2-x+1}{3x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f.

2. Calculer $f'(x)$.

3. Déterminer les variations de la fonction f.

Exercice 2

Soient les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x$ et $g(x) = x^2 + x + 2$. On note respectivement C_f et C_g les courbes de f respectivement de g.

1. Montrer que le point $A(1\,;4)$ est commun à C_f et C_g.

2. Déterminer les positions relatives de C_f et C_g.

II <u>Extremum d'une fonction</u>

Définitions Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

(i) On dit que f admet un maximum local en $x_0 \in I$ s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$.

Cela signifie que « localement », au voisinage de x_0, la fonction f ne prend que des valeurs inférieures à $f(x_0)$.

(ii) On dit que f admet un minimum local en $x_0 \in I$ s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$.

(iii) On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global en $x_0 \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$.

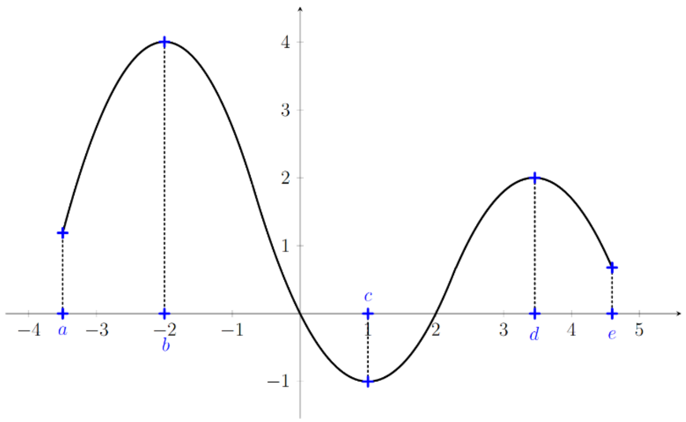
(iv) Un minimum ou maximum local (resp. global) est appelé extremum local (resp. global)

Remarque

Un extremum global est un extremum local (il suffit de prendre $J = \mathbb{R}$) mais la réciproque est fausse.

Exemple

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a\,;e]$:



La fonction f présente 5 extremums :

- 3 minimums locaux en a, c et e

- 2 maximums locaux : en b et d.

De plus, en b et c, les extremums sont globaux sur $[a\,;e]$.

Remarque

La notion d'extremum local/global est relative à l'intervalle sur lequel on se place. Dans l'exemple ci-dessus, f présente un maximum local mais pas global en d sur $[a\,;e]$ mais si on restreint la fonction à $[c\,;e]$, alors f présente un maximum global en d sur $[c\,;e]$. Finalement, « local » signifie qu'aux alentours de x_0 ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum.

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I contenant x_0.
f' s'annule et change de signe en $x_0 \iff f$ admet un extremum local en x_0.

Remarque
Graphiquement, si f admet un extremum local en x_0, alors la tangente en x_0 est une tangente horizontale (parallèle à l'axe des abscisses).

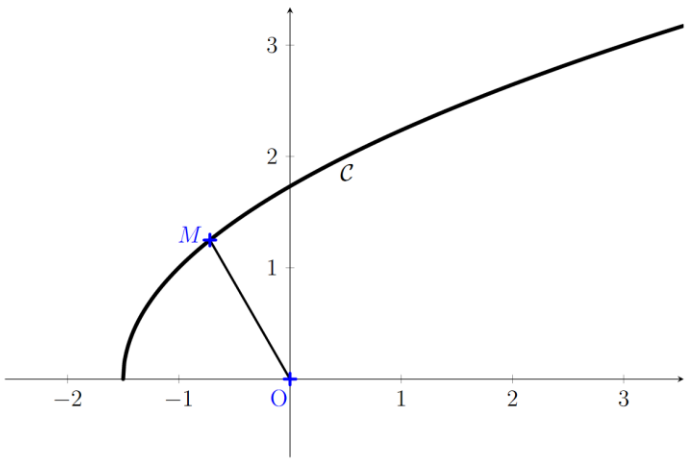
Exemple
Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+7}{x^2+2}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $f'(x) = \frac{4x^2+8-8x^2-14x}{x^2+2} = \frac{-4x^2-14x+8}{x^2+2}$.

$f'(x) = 0 \iff -4x^2 - 14x + 8 = 0$. On a $\Delta = 324 = 18^2$ soit deux racines :

$x_1 = \frac{14-18}{-8} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{14+18}{-8} = -4$. Le signe de $f'(x)$ dépend de $-4x^2 - 14x + 8$ car $x^2 + 2 > 0$.

Comme $f'(x)$ s'annule et change de signe en ½ et -4, f admet deux extremums locaux en ces valeurs.

Exercice 3 *Optimisation*
On considère, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ définie sur $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
Déterminer le(s) point(s) de la courbe $\mathcal{C}$ le(s) plus proche(s) de l'origine O du repère.



Exercice 4 *Obtention d'une inégalité*
Démontrer que, pour que tout réel $x \in [-2;\ +\infty[$, $x^3 \geq 3x - 2$. *Indication : Utiliser une fonction bien choisie afin d'en étudier le signe.*

Solution des exercices

Exercice 2

Soit $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$. On a $d'(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Le discriminant vaut -20 donc $d'(x) > 0$ et d strict. croissante sur $\mathbb{R}$. Or $d(1) = 0$ car A appartient aux deux courbes. Donc C_f en-dessous de C_g pour $x \leq 1$ et inversement.

Exercice 3

Solution. — Soit $x \in \left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$ et M le point de coordonnées $(x\,;f(x))$. La question revient à déterminer x tel que la distance OM soit minimale. Comme une distance est positive et comme la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, cela revient à déterminer x tel que OM^2 soit minimale. Notons $d(x) = \mathrm{O}M^2$. Comme le repère est orthonormé,

$$d(x) = x_M^2 + y_M^2 = x^2 + f(x)^2 = x^2 + \sqrt{2x+3}^2 = x^2 + 2x + 3.$$

Ainsi, $d(x)$ est un polynôme du second degré. Comme $a = 1 > 0$ et $b = 2$, la fonction $x \mapsto d(x)$ atteint son minimum global en $-\frac{2}{2\times 1} = -1$.

Ainsi, il existe un unique M tel que OM soit minimale : il s'agit du point de coordonnées $(1\,;f(1))$ i.e. $\left(1\,;\sqrt{5}\right)$.

Exercice 4

Solution. — Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - (3x-2)$ définie sur $[-2\,;+\infty[$. Ainsi, pour tout réel $x \geqslant -2$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

La fonction f est dérivable sur $[-2\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant -2$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$.

Ainsi, $f'(x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont évidentes : -1 et 1. Comme $a = 3 > 0$, on en déduit que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [-2\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [-1\,;1]$. Dès lors, f est croissante sur $[-2\,;-1]$, décroissante sur $]-1\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

On a donc le tableau de variation ci-dessous :

x	-2		-1		1		$+\infty$
Variation de f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, f admet un minimum global en -2 et 1 qui vaut 0 donc, pour tout réel $x \geqslant -2$, $f(x) \geqslant 0$. Il s'ensuit que, pour tout $x \geqslant -2$, $x^3 - (3x-2) \geqslant 0$ i.e. $x^3 \geqslant 3x - 2$.