Exercice 1

Développer puis réduire les expressions suivantes :

- $A=(x^2+4)(2x-3)$
- $B=x+2(x-5)+8(3-2x)$
- $C=(5-2x)(x-4)$
- $D=(x-4)^2+(3x+1)^2$
- $E=(x-1)^2-(2x+5)^2$
- $F=x(x+1)(x-3)$
- $G=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $H=(a+b)^3$
- $I=(a-b)^3$
- $J=-(x-7)$
- $K=-(2x+3)^2$
- $L=(x-2)^2$
- $M=(x+1)^2-x^2$

Exercice 2

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- $A=x(x-1)+2x(x-3)$
- $B=(x-1)^2+4(x-1)(x+5)$
- $C=x^2-(3x+1)^2$
- $D=x(x-4)-5(4-x)$
- $E=4x^2+20x+25$
- $F=x(x-1)-(2x+5)x$
- $G=(x+5)^2-(2x+7)^2$
- $H=(5x+1)(-3x+4)+x(10x+2)$
- $I=x^3-12x^2$
- $J=x^2-4+(x-2)(2x+1)$
- $K=2x-3+(3-2x)^2$
- $L=(2a+1)^2-(a+6)^2$
- $M=(2x-3)(1-x)-3(x-1)(x+2)$
- $N=(x-1)^2+2(x^2-1)$
- $O=x^4+4x^3+4x^2$
- $P=4x^5-x^3$
- $Q=x^7-x^5$
- $R=x(x+2)^2-4x(x-1)^2$
- $S=(2a-b)(b-a)-(2b-a)(b-2a)$
- $T=a^4-b^4$

Exercice 3

1. Effectuer les calculs ci-dessous à l'aide de la calculatrice :
 a. $123^2-122^2-121^2+120^2$
 b. $45^2-44^2-43^2+42^2$
 c. $87^2-86^2-85^2+84^2$
Quelle remarque peut-on faire concernant les résultats ?
2. Choisir quatre nombres entiers consécutifs et effectuer les mêmes calculs qu'à la question 1. Remarque-t-on toujours la même propriété que précédemment ?
3. Expliquer pourquoi les égalités précédentes peuvent s'écrire de manière générale sous la forme suivante : $(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2=4$.
4. Prouver que cette égalité est vraie pour tout nombre n entier relatif.

Exercice 4 *D'autres conjectures…*

1. Choisir un nombre entier, élever le nombre suivant et le nombre précédent de cet entier au carré, puis faire la différence de ces deux carrés : on obtient un multiple du nombre choisi.
Démontrer cette propriété.
2. Choisir quatre nombres entiers consécutifs, puis faire le produit du plus petit et du plus grand, puis faire le produit des deux autres nombres.
Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ? Le démontrer.
3. *Vers la spécialité maths* Soit n un entier positif et soit A le nombre défini par $A=\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}$;
En calculant A pour $n=0, n=1$ et $n=2$. Emettre une conjecture et la démontrer.

Exercice 5 *La calculatrice se trompe !*

1. A l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul suivant :

$$F=123456789^2-123456787\times 123456791$$

2. a. Poser $x=123456789$ et exprimer F en fonction de x.
 b. Développer et réduire l'expression trouvée dans la question précédente. Conclure.

Exercice 6

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

```
Afficher « a= ? »
b ⟵ 3*a+5
c ⟵ 2*a-7
d ⟵ b*c
Afficher d
```

1. Donner la valeur de sortie de l'algorithme dans les cas suivants :

(i) $a = \frac{1}{2}$ **(ii)** $a = -\frac{1}{3}$ **(iii)** $a = 3{,}5$ **(iv)** $a = -\frac{2}{3}$

2. On décide de changer la ligne 4 de l'algorithme en « d ⟵ b/c ». Donner la valeur de sortie de l'algorithme dans les cas suivants :

(i) $a = 0$ **(ii)** $a = \frac{7}{2}$ **(iii)** $a = \frac{5}{9}$ **(iv)** $a = -\frac{1}{4}$

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes (en détaillant vos calculs).

A faire sans calculatrice !

$A = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \div \frac{2}{-5}$; $B = \frac{\frac{12}{5}+\frac{13}{2}}{\frac{16}{15}}$; $C = \frac{\frac{1}{7}-\frac{7}{2}\times\frac{3}{2}}{\frac{1}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{2}}$; $D = \frac{2^2\times3^2\times5^4}{2^3\times3\times5^3}$; $E = \frac{7^3\times2^6\times10^{-3}}{4^2\times(-10^{-4})\times7^{-2}}$;

$F = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{9}{5} + \frac{13}{8} + \frac{11}{5}}$; $G = 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48} + 4\sqrt{12}$; $H = 3\sqrt{54} - 7\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{12}$;

$I = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$; $J = \left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 - \left(3 + 4\sqrt{5}\right)\left(3 - 4\sqrt{5}\right)$; $K = \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

$L = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{3}}$; $M = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{20}-\sqrt{45}}{\sqrt{180}}$; $N = \sqrt{\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2}{-\frac{3}{2}+1}}$; $O = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}-1}{1-\frac{5}{4}} \div \left(3 - \frac{1}{2}\right) \div \left(-8 + \frac{36}{5}\right)}$

Exercice 8

Soit $A = \sqrt{3} + 2$ et $B = \sqrt{3} - 2$.

Démontrer que $\frac{A}{B} + \frac{B}{A}$ s'écrit sous la forme d'une fraction.

Exercice 9

1. Simplifier, quand c'est possible, les expressions suivantes :

$A = \frac{2x+4}{x+2}$ $B = \frac{6x-4}{10x+20}$ $C = \frac{5x^2+4x}{x}$ $D = \frac{2x^2+3x}{x^2+x}$.

2. Réduire au même dénominateur les expressions suivantes :

$A = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ $B = -2 + \frac{5}{2x-3}$ $C = \frac{2x+2}{2x-1} + \frac{3x}{x+3}$ $D = \frac{x}{4x^2-1} - \frac{1}{2x+1}$.

Exercice 10

Résoudre les équations ci-dessous :

1. $\frac{2x-3}{5} = \frac{3x}{7}$;

2. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x+5}{6} + x$;

3. $x(4x+1) + 7(4x+1) = 0$;

4. $10(x+7)(x-5) = 3x(x+7)$;

9. $x^2 - 10x + 25 = 0$;

10. $\frac{x+4}{x-1} = 2$;

11. $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{3x}{x^2+2}$;

12. $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-3}{2x+1}$;

5. $x^2 - (6x + 11)^2 = 0$;

6. $\frac{1}{2}x^2 = 8$;

7. $(x - 4)^2 + 3 = 19 - 2x$;

8. $x^2 + 2x = 2x(x - 7)$;

13. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = 0$;

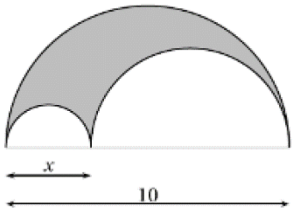
14. $\frac{(\sqrt{5}x+3)^2 - 20x^2}{x^2} = 0$;

15. $\frac{4}{t} - \frac{1}{t^2} = 4$;

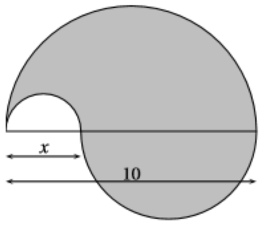
16. $5 + \frac{10x}{1-x} = -\frac{4x^2+1}{(1-x)^2}$.

Exercice 11 *Un peu de géométrie…*

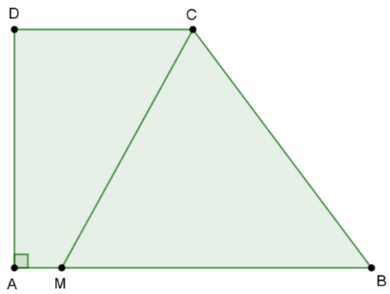
1. Soit x un nombre compris entre 0 et 10. Calculer le périmètre de la figure grisée en fonction de x. Que constate-t-on ?



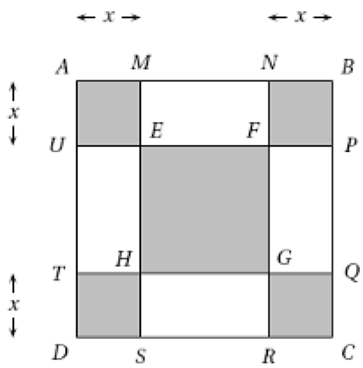
2. Soit x un nombre compris entre 0 et 10. Calculer l'aire de la surface grisée en fonction de x.



3. Un pré est représenté par un trapèze rectangle ABCD tel que AB=12, AD=8 et DC=5 en dam.
On souhaite partager ce pré par un segment [CM] où M est un point du segment [AB] en deux parcelles ADCM et CBM.
On pose $AM = x$.
Déterminer la valeur de x pour que les deux aires soient égales.



4. Sur les côtés du carré ABCD de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqué sur la figure ci-contre, où $0 \leq x \leq 2$.
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du domaine grisé.
a. Montrer que par un raisonnement géométrique que $\mathcal{A}(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $\mathcal{A}(x) = 4x^2 + (4 - 2x)^2$ ou $\mathcal{A}(x) = 16 - 4x(4 - 2x)$.
b. Montrer que l'on a aussi : $\mathcal{A}(x) = 8x^2 - 16x + 16$.
c. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $\mathcal{A}(2)$ puis $\mathcal{A}(\sqrt{3})$.
d. (i) Montrer que $\mathcal{A}(x) = (2x - 1)(4x - 6) + 10$.
(ii) En déduire les valeurs de x telles que l'aire $\mathcal{A}(x)$ soit égale à 10.



Exercice 12

Soit $C(x) = (x - 1)(2x + 3) + (x - 1)^2$.
1. Développer l'expression et montrer que $C(x) = 3x^2 - x - 2$.
2. Calculer la valeur de $C(x)$ pour $x = \sqrt{2}$ et la mettre sous la forme $a + b\sqrt{2}$.
3. Factoriser l'expression $C(x)$.
4. Résoudre l'équation $C(x) = -2$ en choisissant une forme adaptée de $C(x)$.

Exercice 13 *Vers la spécialité maths*

$$f(x) = (3x-4)^2 - (x+6)^2$$
$$g(x) = (2x+1)(3x-2) - (2x+1)^2 - 4x - 2.$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$.
2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
3. Comparer $f(x)$ et $g(x)$.
4. **a.** Déterminer $g\left(\sqrt{3}\right)$ et en déduire $f\left(\sqrt{3}\right)$.
   b. Déterminer $f(-2)$ et en déduire $g(-2)$.
5. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
   b. Sans aucun autre calcul, en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 14 *Vers la spécialité maths*

1. Montrer que le réel $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Remarque

Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le « nombre d'or » et on le note généralement φ (« Phi »).

2. Soit $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

a. Vérifier que $1 + \frac{1}{b} = b$.

b. L'opposé du nombre b est-il égal à l'inverse du nombre a

3. Soit $\alpha = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

a. Montrer que $2\alpha^2 = 2\alpha + 3$.

b. En déduire que $2\alpha^3 = 5\alpha + 3$.

Exercice 15 *Vers la spécialité maths*

1. Démontrer que pour tout entier positif, le nombre $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ est l'inverse du nombre $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2. En déduire la valeur de $A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$.

Exercice 16 *Vers la spécialité maths*

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. a et b sont deux nombres. Soit $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$. Exprimer $x^2 - y^2$en fonction de a et b.

2. a et b sont deux nombres. Soit $x + y = a$ et $xy = b$. Exprimer $(x-y)^2$ en fonction de a et b.

3. Soient a, b et c trois nombres tels que $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 = 1}$. Que vaut $a^4 + (ab+c)^2 + (ac-b)^2$?

4. Soit $a = \frac{2}{3}, b = 1$ et $c = -\frac{2}{5}$. Calculer $ab + ac + bc$ et $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$.

5. Soit a, b et c trois nombres non nuls tels que $\boldsymbol{ab + ac + bc = 0}$.
Montrer que $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = -3$.

6. Soient x et y deux nombres positifs non nuls tels que $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 6xy}$. Que vaut $\frac{x+y}{x-y}$?

Indication : Elever au carré $\frac{x+y}{x-y}$.

7. Soit x, y et z trois nombres vérifiant $\boldsymbol{x^2 = y^2 = z^2}$. Que vaut $(x-y)(y-z)(z-x)$?

8. Soit x un nombre strictement positif tel que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

a. Que vaut $x^4 + \frac{1}{x^4}$? *Indication : Développer* $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$.

b. Que vaut $x + \frac{1}{x}$? Puis en déduire la valeur de $x^3 + \frac{1}{x^3}$?