Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^2 - 14z + 74$$

1. Vérifier que $f(7+5i) = 0$.

2. **a.** Démontrer que pour tout nombre complexe z, $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

b. En déduire la valeur de $f(7-5i)$.

Exercice 2

1. Soit $z = \frac{i-a}{i+a}$ où $a \in \mathbb{R}$.

a. Démontrer que $z = \frac{1-a^2}{1+a^2} + i\frac{2a}{1+a^2}$.

b. Déterminer les valeurs de a telles que $Re(z) = Im(z)$.

2. Soit $z = \frac{a+ib-2i}{a+3+ib}$ avec $(a\,;b) \neq (-3\,;0)$.

a. Démontrer que $z = \frac{a^2+b^2+3a-2b}{(a+3)^2+b^2} - i\frac{2a-3(b-2)}{(a+3)^2+b^2}$.

b. Expliquer pourquoi si $a = 3$ et $b = 4$, alors z est réel.

c. Expliquer pourquoi si $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{5}{2}$, alors z est imaginaire pur.

Exercice 3

Soit $z = a + ib$ où *a* et *b* sont des réels. On pose $Z = z^2 - 2\bar{z} + 1$.

1. **a.** Démontrer que Z peut se mettre sous la forme $Z = a^2 - 2a - b^2 + 1 + i(2ab + 2b)$.

b. Déterminer la valeur de Z lorsque $z = -1 + 5i$.

2. Déterminer z tel que Z soit un nombre réel.

3. Déterminer z tel que Z soit un imaginaire pur.

Exercice 4

Soit (z_n) la suite définie par $z_0 = 1 - i$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n + 2 - i$$

1. Calculer z_1 puis z_2.

On pose, pour tout entier naturel n, $w_n = z_n - (1+2i)$.

2. **a.** Calculer w_0 puis w_1.

b. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme.

3. **a.** Exprimer z_n en fonction de n.

b. Vérifier les valeurs de z_1 et z_2 trouvées dans la 1ère question.

Exercice 5

Soit $z_0 = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$.

1. Déterminer z_0^2, z_0^3 et z_0^{15}.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

3. Donner la forme algébrique de z_0^{20}.

Exercice 6

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$. Montrer que $i\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$.

Exercice 7

Soit $P(z) = z^3 + 2 - 2i$.

1. Calculer $(1+i)^3$.
2. En déduire une factorisation du polynôme P.
3. On pose :

$$b = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$$

Calculer b^3 et c^3, puis proposer une factorisation complète de P.

Exercice 8

Soit $P(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 2z + 2$.

1. Montrer que $P(z)$ peut s'écrire comme produit de deux polynômes du 2nd degré dont on admet que l'un est $z^2 + 2$.
2. En déduire la résolution dans ℂ de l'équation $P(z) = 0$

Exercice 9

1. Résoudre dans ℂ l'équation :

$$z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)z + \sqrt{2} = 0$$

2. Résoudre dans ℂ les équations suivantes :

$$z + \frac{1}{z} = 1 \text{ et } z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$$

3. Soit $P(z) = z^4 - \left(1+\sqrt{2}\right)z^3 + \left(2+\sqrt{2}\right)z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)z + 1$.

   a. Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \frac{1}{z}$.

   b. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 10

On considère l'équation (E) suivante :

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution imaginaire pure. La déterminer.
2. Déterminer deux polynômes P et Q tel que pour tout $z \in$ ℂ tels que :

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = P(z)Q(z)$$

3. En déduire les solutions dans ℂ de l'équation (E).