Equations différentielles et primitives Term

Nombreux sont les phénomènes physiques, démographiques ou économiques qui sont modélisables par la prise en compte de leurs variations. Les relations explicites entre un phénomène et ses variations instantanées se traduisent mathématiquement par des équations différentielles. Schématiquement, une équation différentielle est une équation qui contient une fonction inconnue et certaines de ses dérivées. Enfin, historiquement, un des premiers exemples d'équation différentielle fut posé à Descartes lors de la quadrature de l'hyperbole. Ne disposant pas des outils du calcul différentiel à l'époque, il ne put se tourner que vers des solutions géométrico-algébriques.

I Equations différentielles

Définition Une équation différentielle d'ordre *n* est une égalité liant la variable, une fonction inconnue *y*, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et ses dérivées successives $y', y'', \dots, y^{(n)}$ et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f, …). On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction dérivable vérifiant l'égalité. Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Remarques

1) L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée présente dans l'équation. Cette année seront étudiées les ED d'ordre 1 uniquement.

2) On peut être amené à utiliser ces notations provenant de la physique : $y' = \frac{dy}{dx}$, $y' = \frac{dy}{dt}$.

3) **Attention !!** x est la variable et y est une fonction (Statut des lettres !)

Exemples

1) Voici quelques exemples d'équations différentielles : $y' + 2y = 0$; $y'(x) = y^2(x) + x - 2$; $\frac{dy}{dx} + \sqrt{2}y(x) = x^2$; $(1+t)y'' - y = e^t$.

2) $y' = 2x$ (on cherche une fonction dont la dérivée est $2x$) soit $y = x^2$ ou $y = x^2 + 1$, il y en a une infinité !

3) La fonction $f : t \longmapsto e^{-2t}$ est solution de l'équation différentielle suivante : $y' + 2y = 0$. En effet : $f'(t) + 2f(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-2t} = 0$.

Exercice 1

1. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 2e^x$.

2. Montrer que la fonction $h : t \longmapsto \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$ (c un réel tel que $1 - ce^t \neq 0$) est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

II Primitives

2.1 Primitive d'une fonction

Définition Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle primitive d'une fonction *f* continue sur *I* toute fonction dérivable notée *F* solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Ainsi, **une fonction F est une primitive d'une fonction f sur I lorsque pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.**

Remarque

Au sens de la dérivation, on a : *F* se dérive en *f* se dérive en *f'*.

Exemples

1) La fonction $g: x \longmapsto 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

En effet, $g'(x) = 6x + \frac{1}{x}$.

2) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = x$. $G(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + 2$ est une primitive de $g(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$ car $G'(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$.

> **Théorème** Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration qui sera vue ultérieurement

Remarque

Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitives sous forme explicite

> **Théorème** Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
> **Autrement dit**, si F est une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I alors toute primitive de f sur I est de la forme $x: \longmapsto F(x) + C$ où C est un réel quelconque.

*Démonstration **exemplaire***

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I. Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$. Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.

La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.

On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I.

On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Réciproquement, soit F une primitive de f. On pose $G(x) = F(x) + C$. Alors, $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.

Donc G est une primitive de f

Exemple

Les primitives de la fonction $x \longmapsto x^2$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

> **Propriété** Soit une fonction f continue sur un intervalle I.
> Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration

Avec les notations précédentes, $G(x_0) = y_0$ s'écrit $F(x_0) + C = y_0$ soit $C = y_0 - F(x_0)$

Donc $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ et G est définie de façon unique.

Exemple

Cherchons la primitive F de $f: x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(3) = 0$.

La fonction $f: x \mapsto 2x$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $F: x \mapsto x^2 + C$, où C est un réel quelconque.

La condition $F(3) = 0$ donne $F(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -9$, la primitive cherchée est donc $F: x \mapsto x^2 - 9$.

2.2 Primitives des fonction usuelles *(Lecture inverse des formules de dérivées)*

f est une fonction définie sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I.

Fonction f	Fonction F	Intervalle I
$\boldsymbol{k, k \in \mathbb{R}}$	kx	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{x}$	$\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{x^n, n \in \mathbb{Z} - \{-1\,;0\}}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$ $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -2$
$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$\mathbb{R}^*$
$\boldsymbol{\frac{1}{x^2}}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x}}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\boldsymbol{e^x}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{\cos x}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{\sin x}$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Tableau des primitives des fonctions usuelles (à connaître par cœur !)

2.3 Linéarité des primitives

Propriétés Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :
(i) $F + G$ est une primitive de $f + g$ (ii) kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstrations
$(F+G)' = F' + G' = f + g$ et $(kF)' = kF' = kf$.

Exemples

1) Une primitive de $f(x) = 2x^2 - x$ est $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}$.

2) Les primitives de $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2\sin x$ sont de la forme $G(x) = -\frac{1}{x} - 2\cos x + C, C$ un réel.

2.4 Primitives de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Primitive de f sur I à une constante près	Condition
$\boldsymbol{u'u^n, n \in \mathbb{Z} - \{-1\,;0\}}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$u(x) \neq 0, \forall x \in I$ si $n \leq -2$
$\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$	$\ln u$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\boldsymbol{\frac{u'}{u^2}}$	$-\frac{1}{u}$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{u}}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\boldsymbol{u'e^u}$	e^u	
$\boldsymbol{u'\cos u}$	$\sin u$	
$\boldsymbol{u'\sin u}$	$-\cos u$	

Tableau des primitives des fonctions composées (à connaître par cœur !)

Exemples
1) Sur $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = x^2-5x+4 \to u'(x) = 2x-5$.
Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$.
Soit $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-5x+4)^3$.
2) Sur $I = \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x \to u'(x) = \frac{1}{x}$. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est de la forme $\ln|u|$. Soit $F(x) = \ln|\ln x|$.
3) Sur $I = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2+1 \to u'(x) = 2x$. Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$. Soit $F(x) = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$.
4) Sur $I = \mathbb{R}, f(x) = x^2e^{x^3} = \frac{1}{3}3x^2e^{x^3}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^3 \to u'(x) = 3x^2$. Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u. Soit $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3}$.

Exercice 2

1. Soit la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t(t+1)}$.

a) Déterminer a et b tel que $f(t) = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$.

b) En déduire une primitive de f.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)^2}$.

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$.

b) En déduire une primitive de g.

Application en physique : *Le mouvement rectiligne*

La notion de primitive est particulièrement utile pour analyser le mouvement d'un objet qui se déplace en ligne droite. Si la position de l'objet est donnée par la fonction $s : t \longmapsto s(t)$, sa vitesse est la fonction dérivée $v(t) = s'(t)$. D'où, la fonction position est une primitive de la fonction vitesse. De même, comme la fonction accélération est $a(t) = v'(t)$, la fonction vitesse est une primitive de la fonction accélération. A condition de connaître les valeurs initiales $s(0)$ et $v(0)$, la fonction s se déduit de l'accélération en prenant deux fois de suite une primitive.

Exemple
Un mobile se déplace en ligne droite et son accélération obéit à la formule $a(t) = 6t+4$. Sa vitesse initiale est de $v(0) = 2\ cm/s$ et $s(0) = 3\ cm$. Donnons l'expression de sa fonction position.
Puisque v est une primitive de s, on a $v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t, C \in \mathbb{R}$. Or $v(0) = 2$ soit $C = 2$.
Donc $v(t) = 3t^2 + 4t + 2$.
De même, on a $s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} + 2t + C = t^3 + 2t^2 + 2t + C$. Or $s(0) = 0$ soit $C = 3$.
Donc la fonction position est entièrement déterminée par la formule $s(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 3$.

Corrigé de l'exercice 2

1. a) On a :

$$\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}=\frac{a(t+1)+bt}{t(t+1)}=\frac{at+bt+a}{t(t+1)}=\frac{(a+b)t+a}{t(t+1)}=f(t).$$

En identifiant les coefficients au numérateur de *f(t)* avec le quotient précédemment obtenu, on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \Leftrightarrow b=-1 \end{cases}.$$

On conclut que :

$$f(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}.$$

b) D'après ce qui précède, en posant F une primitive de *f*, on a pour *t* appartenant à $]-1\ ;\ +\infty[$: $F(t)=\ln|t|+\ln(t+1)+k,\ k\in\mathbb{R}.$

2. a) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}&=\frac{\left(e^x+1\right)^2-e^x\left(e^x+1\right)-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\\&=\frac{e^{2x}+2e^x+1-e^{2x}-e^x-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\\&=\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}=g(x).\end{aligned}$$

On a bien pour tout $x\in\mathbb{R},\ g(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}.$

b) D'après la question précédente, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)+\dfrac{1}{e^x+1}+k$ où $k\in\mathbb{R}.$