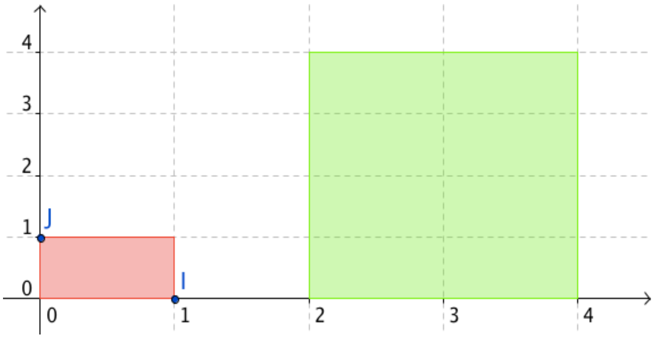
Préliminaire *Unité d'aire*

Dans le repère (O ; I, J), ci-contre, le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

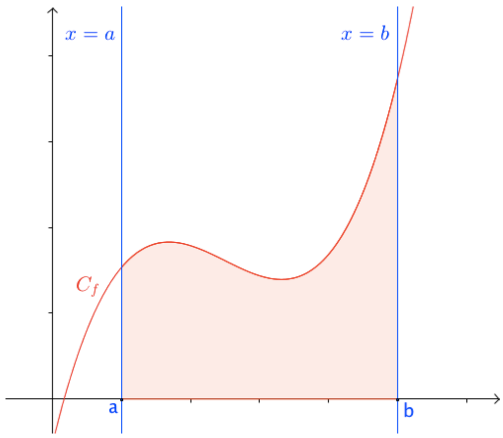


I Généralités

1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ l'aire, exprimée en u.a., du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. On la note $\int_a^b f(x)\,dx$ et on lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».

Figure



Remarques

1) a et b sont appelés les bornes d'intégration.

2) x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs (elle est dite « muette »). Ainsi, on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$. "$dx$" ou "$dt$" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ car le domaine considéré est réduit à un segment.

4) $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ pour $k \in \mathbb{R}^+$.

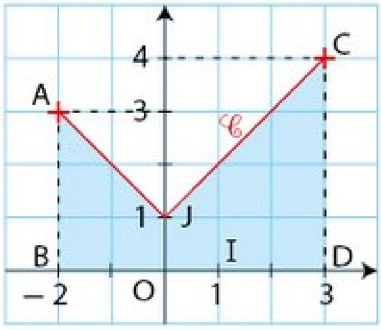
2)

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 \text{ si } -2 \leq x \leq 0 \\ x + 1 \text{ si } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Voici la courbe représentative de la fonction f :

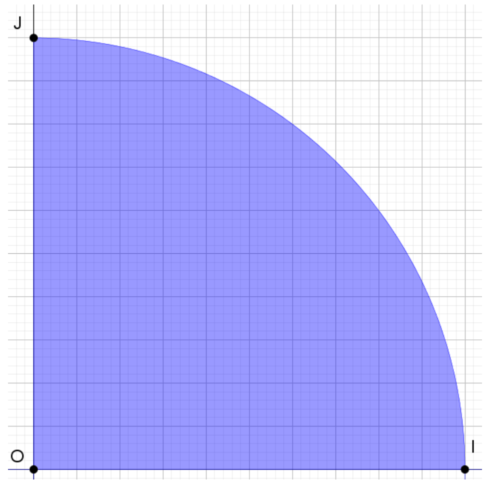


[redacted] f est continue et positive sur $[-2\,;3]$ donc $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$, soit la somme des aires des trapèzes rectangles OJAB et OJCD.

Donc $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \frac{(3+1)\times 2}{2} + \frac{(4+1)\times 3}{2} = 4 + \frac{15}{2} = \frac{23}{2}$.

2) Déterminons la valeur de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

On a $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ et $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est une fonction continue sur [0 ; 1] dont voici son graphe :



On reconnaît un quart de cercle de rayon 1 (en effet, $y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$).

Donc : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{4}\pi 1^2 = \frac{\pi}{4}$ u.a

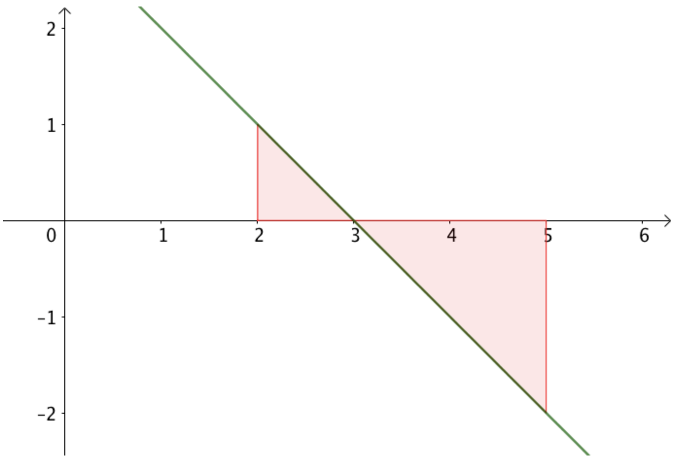
Histoire des mathématiques

Si le mot « intégrale » (du latin *integer*, entier, total) est de de Jacques Bernoulli (1654 – 1705), Gottfried Leibniz (1646 – 1716) lui, en reste au « calcul sommatoire », voyant l'intégrale en question comme somme d'un nombre infini de quantités infinitésimales, les $f(x_n)dx_n$, avec $dx_n = x_{n+1} - x_n$. Il la désigne donc tout naturellement par la lettre S (comme la lettre de début de *summa* en latin, puisqu'il écrit aussi bien en latin qu'en français ou en allemand). Le « S » s'est allongé, pour devenir $\int$ (symbole chargé de trois siècles d'histoire). Leibniz est non seulement philosophe et mathématicien, mais encore diplomate, théologien, juriste, linguiste, historien et géographe. Encyclopédiste, il veut en effet réaliser « un inventaire exact de toutes les connaissances acquises et mal rangées ». Ses écrits sont extraordinairement volumineux ; l'essentiel, plus de deux cent mille pages de manuscrits, est conservé à la ville de Hanovre (sa ville de décès). Les travaux de Leibniz sur le calcul différentiel sont célèbres et parus dans son ouvrage *Acta Eruditorum*. Par ailleurs, il est le plus grand créateur de notation, en plus du symbole $\int$, on lui doit la notation différentielle d, ainsi que la notation $\frac{dy}{dx}$; il est le 1[er] à utiliser le point pour la multiplication, les deux points pour la division et c'est grâce à lui que le signe égal se généralise.

1.2 Extension aux fonctions de signe quelconque

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}$.
Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors on a : $\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}$.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - x$.
On appelle $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.
On appelle $\mathcal{A}_2$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.



Alors, on a : $\int_2^3 f(x)\,dx = \mathcal{A}_1 = \frac{1\times1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\int_3^5 f(x)\,dx = -\mathcal{A}_2 = -\frac{2\times2}{2} = -2$.

1.3 Premières propriétés

Propriété *Relation de Chasles*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b, et c des réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Démonstration en exercice

Exemple
Si on reprend l'exemple précédent, on a : $\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = \frac{1}{2} - 2 = -1{,}5$.

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b des réels appartenant à I.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration en exercice

Exemple

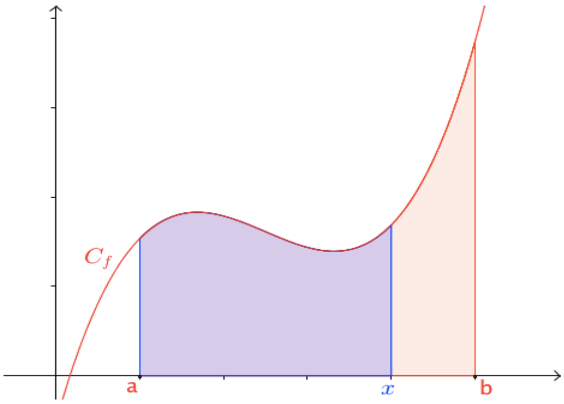
Reprenons l'exemple du bas la p3. $\int_5^2 f(x)\,dx = -\int_2^5 f(x)\,dx = 1{,}5$.

II Intégrale et primitive

2.1 Fonction définie par une intégrale

Théorème Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur [a ; b] par $\boldsymbol{F(t) = \int_a^x f(t)\,dt}$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Figure

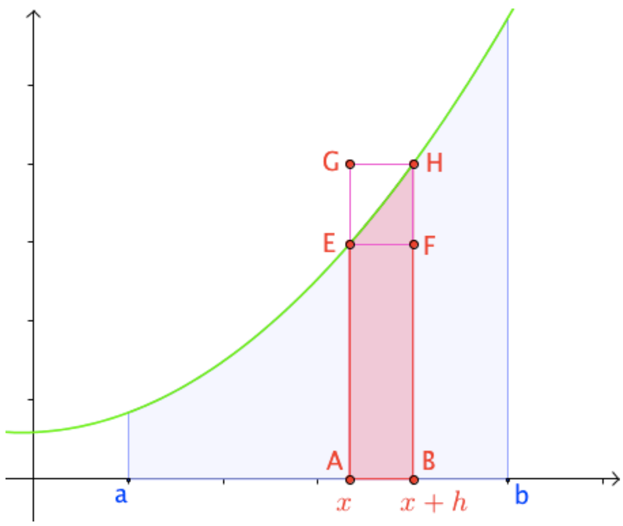


*Démonstration « **exemplaire** » dans le cas où f est strictement croissante*

- 1er cas : $h > 0$

On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a\,;b]$. On veut démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dx - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(x)\,dx \end{aligned}$$



On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $Aire(ABFE) = h \times f(x)$ et $Aire(ABHG) = h \times f(x+h)$.

Comme f est croissante sur $[a\,;b]$, on a : $h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$. Puisque $h > 0$, on a :

$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$$

Comme f est continue sur $[a\,;b]$, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Et donc : $F'(x) = f(x)$. F est donc une primitive de f.

Par ailleurs, F s'annule en a, car $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

- <u>2^e cas : $h < 0$</u>

La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

Remarques

1) On a donc que F est dérivable sur $[a\,;b]$ et que $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

2) Ce théorème est appelé *théorème fondamental de du calcul différentiel et intégral*, la remarque précédente le justifie.

Conséquence Toute fonction continue admet des primitives.

Exemple

La fonction $t \longmapsto \ln t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \geq 1$, $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$ est la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1. Et on a $F'(x) = \ln x \geq 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$ donc F est y est croissante.

2.2 <u>Calcul d'intégrales</u>

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

Si F est une primitive de f alors $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$.

*Démonstration « **exemplaire** »*

La fonction G définie sur $[a\,;b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a\,;b]$ d'après le premier théorème du paragraphe II.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a\,;b]$, on a : $G(x) = F(x) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

De plus, $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ et $G(a) = F(a) + K$ donc $F(a) = -K$ et donc :

$K = -F(a)$.

Or $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) + K = F(b) - F(a)$.

Notation

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemples

1) $\int_{-1}^{1} x^2 - x + 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$.

2) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{2}te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{\ln 3}te^{-t^2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=-\frac{1}{4}\left(e^{-\ln^2 3}-e^{-\ln^2 2}\right)=-\frac{1}{4}\left(\left(e^{\ln 3}\right)^{-\ln 3}-\left(e^{\ln 2}\right)^{-\ln 2}\right)=$

$\displaystyle-\frac{1}{4}\left(3^{-\ln 3}-2^{-\ln 2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{\ln 2}}-\frac{1}{3^{\ln 3}}\right).$

2.3 Propriétés des intégrales

Dans la suite, on prend f et g deux fonctions continues sur [a ; b].

Propriétés *Linéarité de l'intégrale*
(i) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx,$
(ii) $\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Démonstration partielle

Ces propriétés découlent immédiatement de l'écriture des primitives de $f+g$ et λf.

Exemples 1) Soit f une fonction telle que $\int_1^2 f(t)\,dt=2$ et g une fonction telle que $\int_1^2 g(t)\,dt=-\frac{1}{2}$.
Alors, $\int_1^2 (f(t)+4g(t))dt=\int_1^2 f(t)\,dt+\int_a^b 4g(t)\,dt=\int_1^2 f(t)\,dt+4\int_a^b g(t)\,dt=2-2=0.$

2) Soit $I=\int_1^2\frac{1}{x^2+5x+6}dx$. Cherchons deux réels a et b tels que $\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3}$. On trouve $a=1$ et $b=-1$.
Donc $I=\int_1^2\frac{1}{x+2}dx-\int_1^2\frac{1}{x+3}dx=[\ln(x+2)]_1^2-[\ln(x+3)]_1^2=\ln 4-\ln 3-(\ln 5-\ln 4)=\ln\frac{16}{15}$.

Propriétés *Signe de l'intégrale*
(i) Si pour tout $x\in[a\,;b]$, $f(x)\geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.
(ii) Si pour tout $x\in[a\,;b]$, $f(x)\leq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq 0$.

Démonstration partielle

Ces propriétés découlent immédiatement de la définition de l'intégrale.

Exemple
On pour tout $x\in[-1\,;1]$, $(1-x^2)e^{-x^2}\geq 0$ donc $\int_{-1}^1(1-x^2)e^{-x^2}\,dx\geq 0$.
Remarque
Les réciproques de ces propriétés sont fausses. En effet, $\int_0^4 x^2-2x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^4=\frac{64}{3}-16=\frac{64-48}{3}=\frac{16}{3}\geq 0$
mais par contre x^2-2x n'est pas toujours positif sur [0 ; 4] (sur [0 ; 2], c'est négatif !).

Propriété *Intégration d'une inégalité*
Si pour tout $x\in[a\,;b]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$.

Démonstration

Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, alors $g(x)-f(x)\geqslant 0$.
Donc $\int_a^b(g(x)-f(x))\mathrm{d}x\geqslant 0$ et par linéarité $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exemple

On a pour tout $x \in [1\,;4]$, $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ car $x^2 \ge x \Leftrightarrow -x^2 \le -x$ puis par croissance de l'exponentielle. D'où « en intégrant cette inégalité », on obtient $\int_1^4 0\,dx \le \int_1^4 e^{-x2}\,dx \le \int_1^4 e^{-}x\ dx$ soit encore

$0 \le \int_1^4 e^{-x^2}\,dx \le [-e^{-x}]_1^4 \Leftrightarrow 0 \le \int_1^4 e^{-x^2}\,dx \le -(e^{-4} - e^{-1)} \Leftrightarrow 0 \le \int_1^4 e^{-x^2}\,dx \le \frac{e^3-1}{e^4}$.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse. En effet :

$\int_0^2 (1-t^2)\,dt = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{2}{3}$ et $\int_0^2 t^2\,dt = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$. Ainsi, $\int_0^2 (1-t^2)\,dt \le \int_0^2 t^2\,dt$, pourtant la fonction

$t \mapsto 1 - t^2$ n'est pas tout le temps inférieure à la fonction $t \mapsto t^2$ sur $[0\,;2]$.

Propriété *Intégration d'un encadrement*

Soit m et M deux réels tels que pour tout $x \in [a\,;b], m \le f(x) \le M$.

Alors on a : $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Démonstration en exercice

Exercice 1

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. On définit la suite (a_n) pour *n* entier naturel non nul par

$a_n = \int_0^n f(t)dt.$

1. Déterminer le tableau de variations de la fonction *f* en justifiant.

2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.

3. Démontrer que, pour tout réel t, $\dfrac{1}{1+t^2} \le 1$ puis que $a_1 \le 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel t non nul, $\dfrac{1}{1+t^2} \le \dfrac{1}{t^2}$. Et en déduire que, pour tout entier naturel *n* non nul :

$$\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt \le 1 - \frac{1}{n}.$$

5. Démontrer, en utilisant les questions précédentes, que, pour tout entier naturel *n* non nul : $a_n \le 2$. Que peut-on en déduire ?

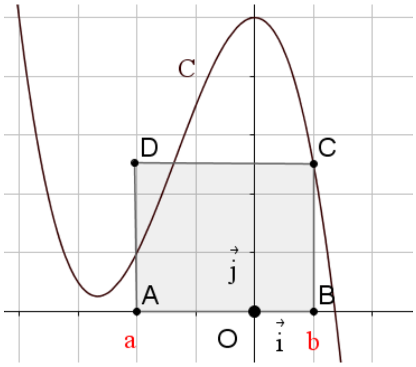
2.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. La valeur moyenne de la fonction f est le nombre μ tel que :

$$\boldsymbol{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Interprétation graphique

Dans le cas où *f* est positive sur [a ; b] la valeur moyenne μ de la fonction *f* est la largeur du rectangle ABCD de longueur $(b-a)$ ayant la même aire que l'aire sous la courbe représentative de *f* entre *a* et *b* (celle grisée) puisque l'on a la relation suivante : $\mu \times (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.



Exemple

La proportion d'individus qui possèdent un équipement mobile dans une population est modélisée par la fonction *p* définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$p(x) = \dfrac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$, où le réel *x* représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2020.

Déterminons la proportion moyenne d'individus équipés entre 2020 et 2021 puis son arrondi au centième.

$$m = \frac{1}{2-1}\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}dx = \left[\frac{1}{0,2}\ln\left(1+e^{0,2x}\right)\right]_0^1$$

$$= 5\left(\ln\left(1+e^{0,2}\right) - \ln\left(1+1\right)\right) = 5\ln\left(\frac{1+e^{0,2}}{2}\right) \approx 0,52.$$

Interprétation en physique (cinématique)

On rappelle que si la position de l'objet est donnée par la fonction $s: t \longmapsto s(t)$ et que s est une primitive de la fonction vitesse v. Donc on a $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = [s(t)]_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1)$.

La vitesse moyenne entre deux temps t_1 et t_2 est la valeur moyenne de la vitesse (ce qui est plutôt rassurant !).

En effet :

$$v_{moyenne} = \frac{distance\ parcourue}{durée\ du\ trajet} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = valeur\ moyenne\ de\ v$$

III Des compléments

3.1 L'intégration par partie (IPP)

Théorème Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que u' et v' y soient continues.
Alors : $\boldsymbol{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.}$

Démonstration

uv est dérivable sur $[a\,;b]$ et on a : $(uv)' = u'v + uv'$

Les fonctions uv', $u'v$ et $(uv)'$ sont continues sur $[a\,;b]$, donc :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (u'v + uv')(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (u'v)(x)\,dx + \int_a^b (uv')(x)\,dx$$
$$= \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

D'où :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Remarques

1) La formule d'IPP permet principalement de calculer certaines intégrales dont on ignore une primitive « à vue » et aussi de déterminer des relations de récurrence.

2) La deuxième intégrale $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ est censée être plus facile à calculer que celle de départ : c'est tout l'intérêt de cette formule !

Méthode sur deux exemples

- Si c'est une intégrale du type $\int_a^b P(x)e^{ax}\,dx$, $\int_a^b P(x)\cos(ax)\,dx$ ou $\int_a^b P(x)\sin(ax)\,dx$ avec $P(x)$ un polynôme, alors il faut le dériver afin d'en diminuer le degré (on choisira donc la fonction u pour ce polynôme). Par exemple :

  $A = \int_0^4 (2x+1)e^{-x}\,dx$. Posons $u(x) = 2x+1$ $\qquad u'(x) = 2$

  $v'(x) = e^{-x}$ $\qquad v(x) = -e^{-x}$

Où u', v' sont continues sur $[0\,;4]$.

$A = [-(2\mathrm{x}+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}]_0^4 - \int_0^4 (-2e^{-x})\,dx = -9e^{-4} + 1 + 2[-e^{-x}]_0^4 = -9e^{-4} + 1 + 2(-e^{-4}+1) = 3 - 11e^{-4}$.

- Si c'est une intégrale du type $\int_a^b P(x)\ln x\,dx$, avec $P(x)$ un polynôme alors il serait maladroit de le dériver car nous ne connaissons pas d'emblée une primitive de $\ln x$ (on posera $u(x) = \ln x$). Par exemple :

  $B = \int_1^e x^2 \ln x\,dx$. Posons $u(x) = \ln x$ $\qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

  $v'(x) = x^2$ $\qquad v(x) = \frac{x^3}{3}$

  Où u', v' sont continues sur $[1\,;e]$.

  $B = \left[\frac{\mathrm{x}^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.

Exercice 2

On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$$

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de (I_n).

2. Démontrer que la limite de (J_n) est 0.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$$

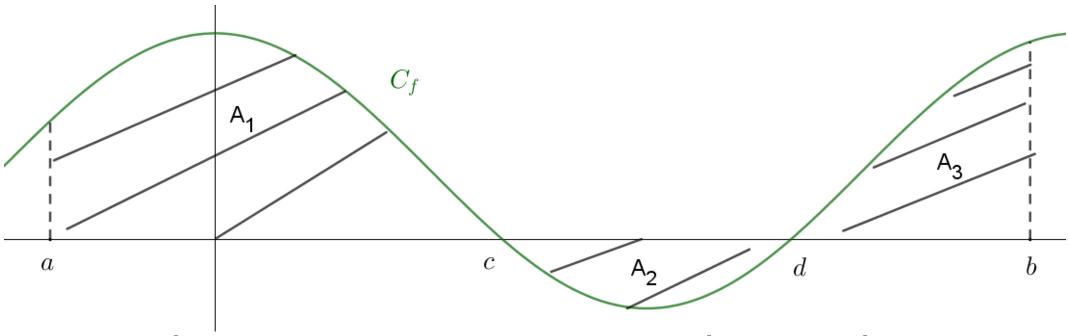
b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n$.

3.2 Calculs d'aires à l'aide des intégrales

Propriété Soit f une fonction continue et de signe quelconque sur un intervalle $[a\,;b]$.
$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx$ est l'aire du domaine délimité par C_f la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Démonstration admise

Remarque
Pour calculer l'aire comprise entre la courbe comprise entre C_f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, on décompose l'intervalle en sous-intervalles où la fonction est de signe constant.



$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Propriété Soit f et g deux fonctions continues et tels que pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[a\,;b]$ est donnée par :

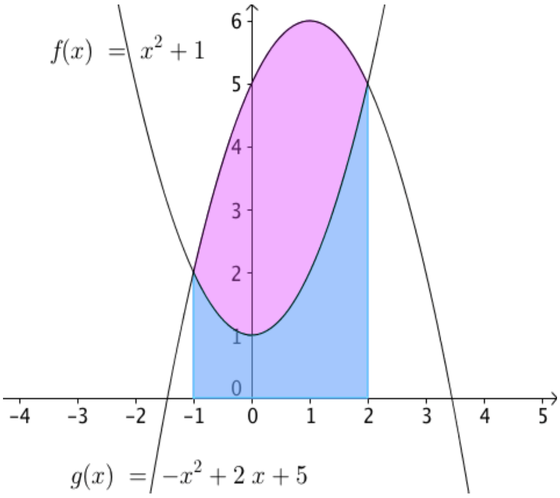
$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Démonstration en exercice

Remarque
D'une manière générale, si l'inégalité n'est pas vérifiée sur tout l'intervalle [a ; b], on a :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx$$

Exemple On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admet que pour tout x de $[-1 ; 2]$, on a $f(x) \leq g(x)$



On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f.
Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
I_g &= \int_{-1}^{2} g(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_{-1}^{2} \\
&= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1)\right) \\
&= 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_f &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{2} x^2 + 1\ dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right) \\
&= 6
\end{aligned}$$

Donc : $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9\ u.a.$

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : 1. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $f'(t)=\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$.

On a $f'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}=0 \Leftrightarrow -2t=0 \Leftrightarrow t=0$. D'où le tableau de variations de la fonction *f* .

t	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(t)		+	0	−	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On a $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+t^2}=0$ (car $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t^2=+\infty$).

2. On a $a_{n+1}-a_n=\int_0^{n+1} f(t)dt-\int_0^n f(t)dt=\int_0^{n+1} f(t)dt+\int_n^0 f(t)dt=\int_n^{n+1} f(t)dt$

D'après le tableau de variations de *f* (voir question précédente), on a pout tout *t* réel que le signe de *f(t)* est positif. D'où $a_{n+1}-a_n\geq 0$. La suite (a_n) est donc croissante.

3. D'après le tableau de variations de *f*, le maximum de *f* est 1. Donc pour tout réel *t*, $f(t)\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+t^2}\leq 1$. En intégrant cette inégalité, on a : $\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}dt\leq\int_0^1 dt \Leftrightarrow a_1\leq 1$.

4. Soit *t* réel non nul, on a : $1+t^2\geq t^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+t^2}\leq\dfrac{1}{t^2}$. En « intégrant cette inégalité », on a pour *n* entier naturel non nul : $\int_1^n \dfrac{1}{1+t^2}dt\leq\int_1^n\dfrac{1}{t^2}dt \Leftrightarrow \int_1^n\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq\left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^n \Leftrightarrow \int_1^n\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq 1-\dfrac{1}{n}$.

5. Soit *n* entier naturel non nul, on a par la relation de Chasles :

$$a_n=\int_0^n\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^n\frac{1}{1+t^2}dt=a_1+\int_1^n\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Or, on a démontré : $a_1\leq 1$ et $\int_1^n\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq 1-\dfrac{1}{n}$.

D'où : $a_n=a_1+\int_1^n\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq 1+1-\dfrac{1}{n}\leq 2$.

Exercice 2

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.

En intégrant sur $[0;1]$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq \dfrac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq x^{n+2}$

En intégrant sur $[0;1]$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+3}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, en utilisant le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

3. (a) On pose $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

u et v sont dérivables sur $[0;1]$.

u' et v' sont continues sur $[0;1]$.

$u'(x) = -\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}}$ et $v'(x) = x^n$.

On peut utiliser une intégration par parties.

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \left(-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}$$

(b) $nI_n = \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2}} + \dfrac{n}{n+1} J_n$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.