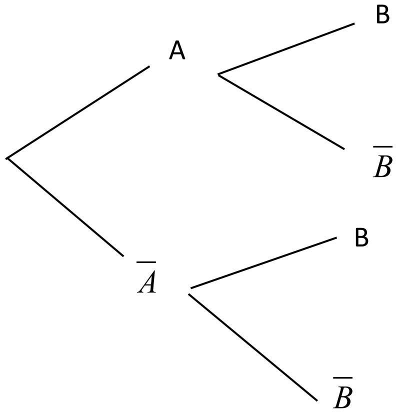
Chapitre 6 SUCCESSION D'EPREUVES INDEPENDANTES Term

I Représenter une succession d'épreuves

1.1 Succession d'épreuves quelconques : des rappels

On peut représenter une succession d'épreuves quelconques par un arbre pondéré ou arbre de probabilités.



Le chemin A suivi de B représente l'intersection $A \cap B$. Les probabilités portées sur les branches dans la 2ème épreuve sont des probabilités conditionnelles. On a la formule suivante : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ si $P(B) \neq 0$.

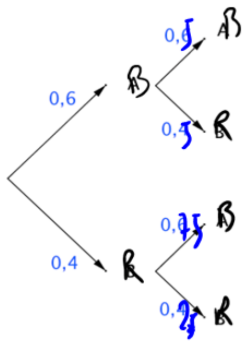
Règle 1: Quand des branches partent du même point, la somme des probabilités écrites de ces branches est égale à 1.

Règle 2: Quand une issue est constitué d'une succession de branches, la probabilité de cette issue est égale au produit des probabilités de ces branches.

Règle 3: Quand un événement est réalisé par plusieurs issues, la probabilité de cet événement est égale à la somme des probabilités de ces issues.

Exemple

On considère l'expérience suivante : Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et **on la met de côté**. On répète l'expérience deux fois de suite Soit les événements suivants :
B : « obtenir deux boules blanches » et R : « obtenir une boule blanche ». On a donc : P(B) = $\frac{3}{5}$ = 0,6 et P(R) = $\frac{2}{5}$ = 0,4.
On résume les issues de l'expérience dans un arbre de probabilité :



Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue (B ; B) : P_1 = 0,6 x 0,5 = 0,3 (d'après l'arbre).
Obtenir une boule blanche et une boule rouge lors des deux tirages correspond aux issues (R ; B) et (B ; R) :
$P_2 = 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}54$. Obtenir au moins une boule blanche lors des deux tirages correspond aux issues (R ; B), (B ; R) et (B ; B) : P_3 = 0,54 + 0,3 = 0,84.

Remarques
1) Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
2) Pour une expérience dont le nombre de répétitions est supérieur à 2, le principe reste le même.

1.2 Succession d'épreuves indépendantes

Définition Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

Propriété Lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une expérience aléatoire dont les issues $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ont pour probabilité $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$, alors la probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est égale aux produits de leurs probabilités cad $P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$.

Démonstration admise

Exemple
On lance un dé tétraédrique équilibré dont les quatre sommets sont numérotés 1, 2, 3, 4.
Puis, on tire au hasard un jeton d'un sac contenant un jeton A et deux jetons B.

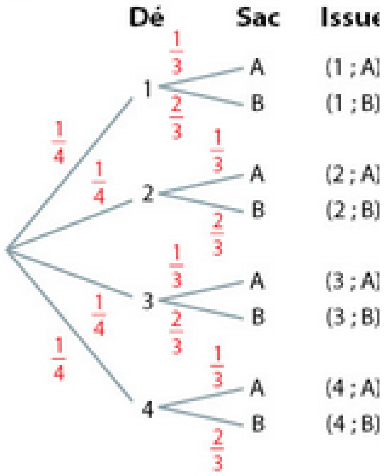
On représente ces issues à l'aide de l'arbre ci-contre.
Par exemple :

$$P(1;A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(3;A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(1;B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

D'où la loi de probabilité de la succession de ces deux épreuves indépendantes.



Issue	(1 ; A)	(1 ; B)	(2 ; A)	(2 ; B)	(3 ; A)	(3 ; B)	(4 ; A)	(4 ; B)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Remarque
L'emploi de certains mots clefs dans l'énoncé indique l'indépendance, par exemple :
- des tirages successifs avec remise (sans remise il n'y a plus indépendance) ;
- une roue qui tourne plusieurs fois ;
- on lance des dés ou des pièces de monnaie ;
- on a plusieurs urnes et on tire des boules dans chacune d'elles sans condition.

II Loi de Bernoulli

Définition Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues possibles qu'on appelle généralement, pour l'une, succès (S) et l'autre échec (E ou $\bar{S}$).

Exemples
1) On lance une pièce de monnaie équilibrée ou non. On appelle par exemple succès, l'issue Pile et échec, l'issue Face.
2) On lance un dé à 6 faces truqué ou non. On appelle par exemple succès obtenir un 2 et échec, ne pas obtenir un 2.

Définitions Soit X la va prenant la valeur 1 si S est réalisé avec une probabilité p et 0 sinon. X est appelée variable aléatoire de Bernoulli.
La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

Représentation de la loi de Bernoulli

$\boldsymbol{k}$	0	1
$\boldsymbol{P(X=k)}$	$1-p$	p

Propriétés Soit X une va de Bernoulli de paramètre p.
(i) $E(X)=p$
(ii) $V(X)=p(1-p)$
(iii) $\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$

Démonstrations en exercice

On rappelle que l'on interprète l'espérance comme une moyenne qui n'est vraie que pour un très grand nombre de répétitions de l'expérience.

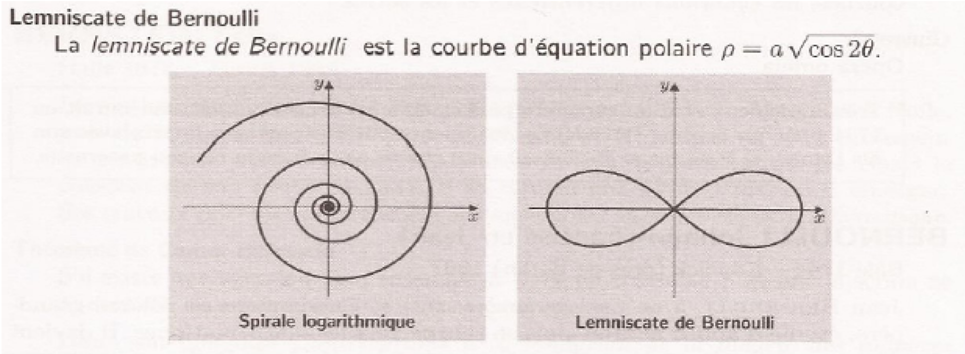
Exemple
Soit l'expérience du lancer de dé. On considère comme succès d'obtenir un numéro supérieur strictement à 2.

$\boldsymbol{k}$	0	1
$\boldsymbol{P(X=k)}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Histoire des mathématiques

Jakob BERNOULLI (1654 – 1705) est le premier d'une lignée de mathématiciens suisse d'origine anversoise. La famille Bernoulli s'exile alors que le général Fernando Alvarez De Toledo, plus connu sous le nom de duc D'Albe, fait régner la terreur dans les Flandres, qu'il gouverne de 1567 à 1573 au nom du roi d'Espagne Philippe II. Sur les conseils de son père, il étudie d'abord la théologie mais il se tourne rapidement vers l'astronomie, les mathématiques et la physique. Il voyage en France, en Angleterre et dans les Flandres pour rencontrer les scientifiques de renom. A son retour en Suisse en 1687, il devient professeur à l'université de Bâle, où il demeurera jusqu'à sa mort ; de cette époque datent ses principaux travaux. Le grand mérite de Jacques Bernoulli est de développer le calcul infinitésimal et de l'adapter à de nombreuses situations, en particulier à l'étude des courbes. Il étudie les courbes isochrones (courbe plane qui décrit un corps en train de tomber, la composante verticale de la vitesse étant uniforme) et le rayon de courbure. On lui doit des études sur les coniques, la spirale logarithmique, la cycloïde, la tractrice et la lemniscate. Il introduit en 1691 le terme calcul intégral dans son sens mathématique actuel. Il est le premier à utiliser les coordonnées polaires et il sait dériver avec de telles coordonnées. On doit à Jacques Bernoulli des travaux sur les séries avec des démonstrations rigoureuses de convergence ($\sum \frac{1}{n^2}$). L'intérêt que porte Jacques Bernoulli au calcul des probabilités l'amène à s'interroger sur les notions de probabilité « géométrique » a priori donnée pour des raisons de symétrie du problème, et de probabilité a posteriori constatée par la fréquence d'apparitions. On lui doit une démonstration rigoureuse de la loi faible des grands nombres pour le jeu de pile ou face.

Œuvres : - Acta eruditorum (1690)
- Ars conjectandi (1713)



III <u>Loi binomiale</u>

3.1 <u>Schéma de Bernoulli</u>

Définition On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple
La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli d'ordre 10.

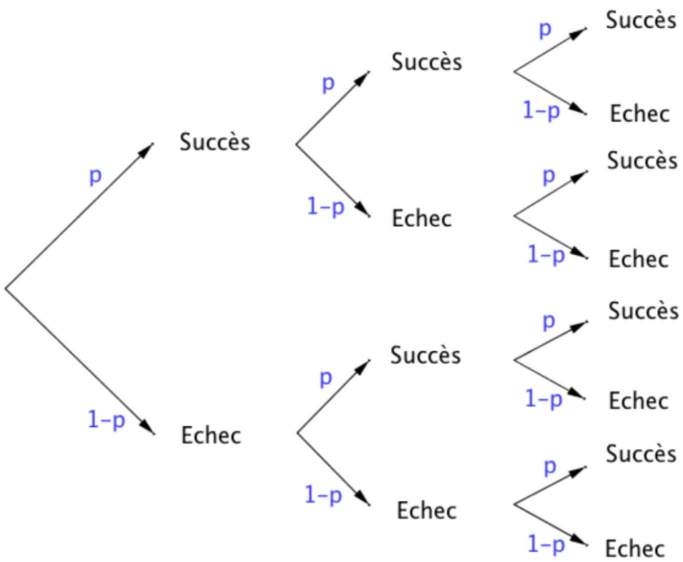
Remarque
Un schéma de Bernoulli peut se représenter à l'aide d'un arbre pondéré mais dès que l'on dépasse 4 répétitions cela devient compliqué à construire.

L'objectif de la suite du cours est de déterminer la probabilité d'obtenir k succès lorsque l'on fait n épreuves de Bernoulli, sachant que $k \in \{0, \dots, n\}$.

3.2 <u>Etude d'un exemple</u>

Soit l'expérience suivante d'un schéma de Bernoulli d'ordre 3 où la probabilité du succès est p.

Voici l'arbre pondéré de cette expérience :



Soit X la va aléatoire modélisant le nombre de succès. X peut donc prendre les valeurs 0,1,2 et 3.

On a par exemple :

- $P(X = 3) = p^3$.
En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de p x p x p.

- X = 2 correspond aux suites d'issues suivantes :
(Succès ; Succès ; Echec)
(Succès ; Echec ; Succès)
(Echec ; Succès ; Succès)
Donc $P(X = 2) = 3\,p^2\,(1 - p)$

En continuant comme ceci, on obtiendra la loi du nombre du succès que l'on appellera loi binomiale de paramètres n=3 et p.

3.3 Coefficients binomiaux

Préliminaire

Dans l'arbre précédent, on peut se poser cette question : Combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 répétitions ? On dit aussi : Combien y-a-t-il de combinaisons de 2 parmi 3 ?
(Succès ; Succès ; Echec)
(Succès ; Echec ; Succès)
(Echec ; Succès ; Succès)

Il existe donc trois combinaisons de 2 parmi 3 et on note : $\binom{3}{2} = 3$.

Définition Soit un schéma de Bernoulli d'ordre n $(n \geq 1)$, représenté par un arbre.
Pour $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ (on lit « k parmi n ») le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors de n répétitions. On l'appelle coefficient binomial de k parmi n.
Par convention, $\binom{0}{0} = 1$.

Exemples
1) D'après l'arbre précédent, il y a un chemin conduisant à 1 succès parmi 3 répétitions donc $\binom{3}{1} = 1$.
2) ***Avec la calculatrice***

Déterminons $\binom{7}{3}$ à l'aide de la calculatrice :

Calculatrice TI

On saisit `7 Combinaison 3`

où `Combinaison` s'obtient en :

- appuyant sur la touche math
- choisissant **PRB**
- choisissant **3 :Combinaison**

On obtient $\binom{7}{3} = 35.$

Calculatrice CASIO

On saisit `7C3`

où `C` s'obtient en :

- appuyant sur la touche OPTN
- choisissant ▷ puis PROB
- choisissant nCr

Propriétés
(i) Pour tout entier $n \geq 1, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
(ii) Pour tous entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
(iii) *Formule de Pascal* : Pour tous entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Démonstrations

(i) Un seul chemin conduit à aucun succès au cours de n répétitions, c'est le chemin $\overline{S}\,\overline{S}\cdots\overline{S}$, donc $\binom{n}{0} = 1$.

Un seul chemin conduit à n succès au cours de n répétitions, c'est le chemin $SS\cdots S$ donc $\binom{n}{n} = 1$.

(ii) Si $n = 0$, alors $k = 0$ et l'égalité est vérifiée.

Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{k}$ est le nombre se chemins réalisant k succès, c'est aussi le nombre de chemins réalisant $(n-k)$ échecs.

Par symétrie c'est aussi le nombre de chemins réalisant $(n-k)$ succès.

On a donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(iii) Admise

Exemples

1) $\binom{25}{24} = \binom{25}{25-24} = \binom{25}{1} = 25$.

2) $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + \binom{3}{2} = 3 + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 3+2+1 = 6$

3.4 <u>Loi binomiale de paramètres n et p</u>

Définition - Théorème Soit un schéma de Bernoulli d'ordre n $(n \geq 1)$ où la probabilité du succès est p. Soit X la va qui compte le nombre de succès. On a $X(\Omega) = \{0; 1; \ldots; n\}$.
Pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. On note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

*Démonstration **à connaître***

Les n épreuves répétées sont identiques et indépendantes donc un chemin de l'arbre réalisant k succès de probabilité p, et $n-k$ échecs de probabilité $1-p$, conduit à une issue dont la probabilité est donnée par $p^k(1-p)^{n-k}$. Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins réalisant k succès (voir p. 60) donc $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants

1) On répète 4 fois une expérience à deux issues : boules gagnantes (5 issues) ; boules perdantes (7 issues).

Le <u>**succès**</u> est d'obtenir une boule gagnante.

La <u>**probabilité du succès**</u> sur un tirage est égale à $\frac{5}{12}$.

Les paramètres de la loi binomiale sont donc : n = 4 et $p = \frac{5}{12}$.

2) $P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^k \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{4-k}$

$= \binom{4}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^k \left(\frac{7}{12}\right)^{4-k}$

3) $P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^{4-3}$

$= \binom{4}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \times \frac{7}{12}$

$= \binom{4}{3} \times \frac{125}{1728} \times \frac{7}{12}$

$= \binom{4}{3} \times \frac{875}{20736}$

On a [redacted] $\binom{4}{3} = 4$, et donc :

$P(X = 3) = 4 \times \frac{875}{20736} = \frac{875}{5184} \approx 0{,}17$.

Calculs des probabilités à l'aide de la calculatrice

	TI 83	Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST BINM
$P(X=k)$	binomFdP(n , p , k)	BpD binomialPD(k , n , p)
$P(X \leqslant k)$	binomFRép(n , p , k)	BcD binomialCD(k , n , p)

NumWorks : Probabilités EXE
Binomiale EXE, renseigner n et p,
Suivant. Sélectionner pour $P(X = k)$ Sélectionner pour $P(X \leq k)$.

Remarques
On a :
(i) $P(X \geq k) = P(\overline{\{X < k\}} = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$
(ii) $P(X > k) = P(\overline{\{X \leq k\}} = 1 - P(X \leq k)$
(iii) On rappelle que si A et B sont incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, soit $P(X \leq k') = P(k \leq X \leq k') + P(X < k) \Leftrightarrow) P(k \leq X \leq k') = P(X \leq k') - P(X < k) = P(X \leq k') - P(X \leq k - 1)$.

Exemples
Soit $X \sim \mathcal{B}\left(10\,;\frac{1}{6}\right)$. On a $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 6) \approx 0{,}0155$ et
$P(4 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3) \approx 0{,}0697$.

Propriétés Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.
(i) $E(X) = np$
(ii) $V(X) = np(1-p)$
(iii) $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstrations qui seront abordées dans un chapitre ultérieur

Exemple
Soit $X \sim \mathcal{B}(20\,; 0{,}6)$. $E(X) = 20.0{,}6 = 12$, $V(X) = 20.0{,}6.0{,}4 = 4{,}8$ et $(X) = \sqrt{20.0{,}4.0{,}4} \approx 2{,}19$.
Remarque
Plus l'écart-type est petit, plus les valeurs proches de son espérance sont probables.

Exercice

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
On définit les évènements suivants :

— A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
— B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
— J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes,

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a. Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n}2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. établir que :

$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}.$$

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

IV Application de la loi binomiale : résoudre un problème de seuil

L'objectif va être de chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure ou supérieure à une valeur donnée.

Préliminaires

1) Déterminer le plus entier $\mathbf{k}$ tel que $\mathbf{P(X \leq k) \geq p}$

Soit $X \sim \mathcal{B}(50; 0,63)$. Déterminons le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$.

• **TI-83 Premium CE** : On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ en appuyant sur f(x) puis en tapant

`\Y1=binomFRép(50.0.63.X)` 1.

Ensuite, on affiche le tableau de valeurs. On obtient :

X	Y1
35	0.8805
36	0.931
37	0.9635

• **Casio GRAPH 90+** : On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ dans le menu **7:Table** du menu principal, en tapant **Y1=BinomialCD(x,50,0.63)** 2.

Ensuite, on affiche le tableau de valeurs. On obtient :

X	Y1
35	0.8805
36	0.931
37	0.9635
38	0.9824

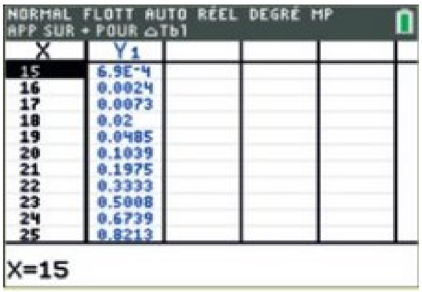
• **NUMWORKS** : Dans le menu Fonctions, on tabule la fonction $k \mapsto (p \leqslant k)$ en écrivant `f(x)=binomcdf(x,50,0.63)` où binomcdf s'obtient avec la touche paste puis le menu Probabilités > Loi Binomiale.
Ensuite, on affiche le tableau de valeurs et on obtient :

35	0.8805196
36	0.9310107
37	0.9635405
38	0.9824891

Conclusion : On constate que $P(X \leq 36) < 0,95$ et $P(X \leq 37) \geq 0,95$ donc $k = 37$.

2) Déterminer le plus grand entier k tel que $P(X \geq k) \geq p$

Soit $X \sim \mathcal{B}(30; 0,78)$. Déterminons le plus grand entier k tel que $P(X \geq k) \geq 0,9$.



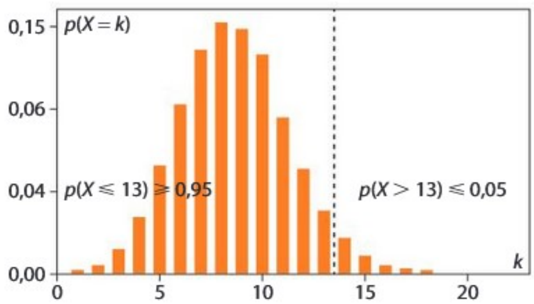
X	Y_1
15	6.9E-4
16	0.0024
17	0.0073
18	0.02
19	0.0485
20	0.1039
21	0.1975
22	0.3333
23	0.5008
24	0.6739
25	0.8213

$p(X \geqslant k) \geqslant 0,9 \Leftrightarrow 1 - p(X < k) \geqslant 0,9$
$\Leftrightarrow 1 - p(X \leqslant k-1) \geqslant 0,9$
$\Leftrightarrow - p(X \leqslant k-1) \geqslant -0,1$
$\Leftrightarrow p(X \leqslant k-1) \leqslant 0,1.$

On conclut que la plus grande valeur de x tel que $P(X \leq x) \leq 0,1$ est 19 donc $k - 1 = 19$ soit $k = 20$.

Définition *Intervalle de fluctuation*
Soit X une va suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0 ; 1[$ et a, b deux entiers.
Un intervalle $[a ; b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha$ est appelé intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$ (ou au risque α) associé à X.

Exemple
Soit $X \sim \mathcal{B}(43; 0,2)$ et $\alpha = 0,05$. On a $P(X \leq 13) \approx 0,964 \geq 0,95$ donc [0 ; 13] est un intervalle de fluctuation au seuil $1 - \alpha = 0,95$ associé à X : on est sûr à au moins 95 % qu'il n'y aura pas plus de 13 succès sur les 43 répétitions.



Propriété
Soit X une va suivant une loi binomiale et $\alpha \in]0 ; 1[$.
L'intervalle [a ; b] tel que a et b soient les plus petits entiers vérifiant respectivement $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}$ et $P(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$ alors l'intervalle [a ; b] est un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ associé à X.

Remarque
C'est cette dernière propriété que l'on utilise en pratique pour trouver un intervalle de fluctuation centré à un seuil donné.

Exemple
Soit $X \sim \mathcal{B}(40; 0,2)$ et $\alpha = 0,05$. Déterminons un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ associé à X.

- 1 On a $p(X \leqslant 2) \approx 0,008 \leqslant 0,025$ et $p(X \leqslant 3) \approx 0,0285 > 0,025$ donc $a = 3$ 2
- On a $p(X \leqslant 12) \approx 0,957 \leqslant 0,975$ et $p(X \leqslant 13) \approx 0,981 \geqslant 0,975$ donc $b = 13$. 3

[3 ; 13] est un intervalle de fluctuation centré associé à X au seuil de 0,95.

1 On utilise la 8.

2 $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ donc on cherche le plus petit entier a tel que $p(X \leqslant a) > 0,025$.

3 $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ donc on cherche le plus petit entier b tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Solution de l'exercice

1. **a.** On a une loi de Bernoulli de paramètres $p = \dfrac{1}{4}$ et $n = 50$.

   b. On a $\text{E} = np = 50 \times \dfrac{1}{4} = 12,5$. (tulipes jaunes)

   c. On a $p(X = n) = \binom{50}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-n} = \binom{50}{n}\dfrac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

   d. $p(X = 15) = \binom{50}{15}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{15} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-15} \approx 0,089$.

2. **a.** Si lot choisi est le 2, on a autant de chances d'avoir une tulipe jaune que le contraire. La loi de Bernoulli a ici pour paramètres $n = 50$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
   La probabilité d'obtenir n tulipes jaunes est donc :
   $p_{\text{B}}(J_n) = \binom{50}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{50-n} = \binom{50}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{50} = \binom{50}{n}2^{-50}$.

   b. De la même façon que précédemment $p_{\text{A}}(J_n) = \binom{50}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-n} =$
   $\binom{50}{n} \times \dfrac{3^{50-n}}{4^{50}}$.
   A et B forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,
   $p(J_n) = p(\text{A} \cap J_n) + p(\text{B} \cap J_n) = p(\text{A}) \times p_A(J_n) + p(\text{B}) \times p_B(J_n) =$
   $\dfrac{1}{2}\binom{50}{n} \times \dfrac{3^{50-n}}{4^{50}} + \dfrac{1}{2}\binom{50}{n} \times \dfrac{1}{2^{50}} = \dfrac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\dfrac{3^{50-n}}{4^{50}} + \dfrac{1}{2^{50}}\right) = \dfrac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\dfrac{3^{50-n} + 2^{50}}{4^{50}}\right)$.

   c. $p_n = p_{J_n}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap J_n)}{p(J_n)} = \dfrac{p_A(J_n) \times p(A)}{p(J_n)} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\binom{50}{n}\dfrac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\dfrac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\dfrac{3^{50-n}}{4^{50}} + \dfrac{1}{2^{50}}\right)} =$
   $\dfrac{\dfrac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\left(\dfrac{3^{50-n} + 2^{50}}{4^{50}}\right)} = \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$.

   d. $p_n \geqslant 0,9 \iff \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}} \geqslant 0,9 \iff 3^{50-n} \geqslant 0,9\left(3^{50-n} + 2^{50}\right) \iff$
   $0,1 \times 3^{50-n} \geqslant 0,9 \times 2^{50} \iff (50 - n)\ln 3 \geqslant \ln(9) + 50\ln 2 \iff$
   $50 - n \geqslant \dfrac{\ln 9 + 50\ln 2}{\ln 3} \iff n \leqslant 50 - \dfrac{\ln 9 + 50\ln 2}{\ln 3} \iff n \leqslant 16,45$.
   Conclusion : il faut que $n < 17$.
   Interprétation : Si le nombre de tulipes jaunes est peu élevé (ici moins de 17) la probabilité d'avoir choisi le lot 1 est très grande ; si ce nombre de tulipes jaunes se rapproche de 25 sur 50, la probabilité est grande que le lot choisi soit le lot 2.