<u>Exercice 1</u> *Des questions indépendantes*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -b^2 & 2b \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a et b tels que $A + B = I_2$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0{,}5 & -4 & 6 \\ -9 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a et b tels que $aA + bB = I_3$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les produits MN et NM, que remarque-t-on ?

b. Déterminer le produit $(M - 2N)(M + 2N)$.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 16 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer (sans calculatrice) M^2 et M^3.

b. Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que :

$$A = aM^2 + bI_3.$$

c. En déduire que $MA = 3M$.

<u>Exercice 2</u>

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

1. a. Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5.

b. Conjecturer une expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ puis démontrer cette conjecture.

2. Donner l'expression générale de P^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Exercice 3</u>

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_2$.

b. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$.

2. Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = C - 2I_3$.

a. Calculer D^2.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, C^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} D$.

<u>Exercice 4</u>

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 + A$ puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Soit $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer P^2, QP et PQ en fonction de P. *Constater que $Q = P + I_3$.*

b. Calculer $(4I_3 - P)Q$. En déduire que Q est inversible et déterminer Q^{-1}.

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$.

2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I_2$ où α et β sont des réels.

3. On considère deux suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$, $s_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, \begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = r_n A + s_n I_2$$

4. Démontrer que la suite (k_n) définie, pour tout entier naturel n, par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique. En déduire une expression en fonction de n de k_n.

5. Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$. **<u>On admet ici</u> que la suite (t_n) est géométrique de raison 2.** En déduire une expression en fonction de n de t_n.

6. Déduire des questions précédentes une expression en fonction de n de r_n et s_n.

7. Déterminer pour tout entier naturel n, une expression de la matrice A^n en fonction de n.

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe a_n et b_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, expliciter les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$.

3. En déduire pour tout entier naturel non nul n, une expression de la matrice A^n en fonction de n.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

1. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$. Puis exprimer U_n en fonction de n.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.

b. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. a. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 8

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$.

1. On pose $W_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que $W_{n+1} = AW_n$. Puis exprimer W_n en fonction de n.

2. a. Déterminer la matrice J telle que $A = 5I_2 + J$.

b. Calculer A^2 et J^2.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n = n5^{n-1}J + 5^nI_2$.

3. a. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

Exercice 9

Soit a un réel donné non nul distinct de -1 et 1.
Nous considérons deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0, v_0 et qui satisfont, quel que soit l'entier naturel n, aux relations de récurrence,

$$u_{n+1} = u_n + av_n \text{ et } v_{n+1} = au_n + v_n.$$

Pour tout entier naturel n, nous posons :

$$s_n = u_n + v_n \text{ et } d_n = u_n - v_n.$$

1. Démontrer que les deux suites (s_n) et (d_n) sont géométriques.
   En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0, n et a.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Comment déterminer la matrice A^n ?

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on considère la suite de matrices (U_n) telles que pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

1. Déterminer la matrice colonne U telle que $U = AU + B$.
2. On pose $V_n = U_n - U$.
   Montrer que pour tout entier naturel n : $V_{n+1} = AV_n$. Déterminer l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n.
3. Etudier la convergence de la suite (U_n).

Exercice 11

Le colza a des aptitudes particulières à disperser ses gènes. Deux espèces A et B de colza sont plantées dans un même champ.
Une étude montre que si a_n et b_n sont les proportions respectives des espèces A et B dans ce champ l'année n où n désigne un nombre entier naturel,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n - 0{,}2b_n + 0{,}07 \\ b_{n+1} = -0{,}4a_n + 0{,}7b_n + 0{,}1 \end{cases}.$$

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Partie A : détermination de la matrice U

1. Déterminer les matrices A et B telles que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$.
2. Déterminer la matrice U telle que $U = AU + B$.

Partie B : Etude de la convergence de la suite $(\boldsymbol{U_n})$

1. On pose $V_n = U_n - U$.
   Montrer que pour tout entier naturel n : $V_{n+1} = AV_n$. Déterminer l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n.
2. En 2015, il y avait une population égale à 0,2 pour l'espèce A et 0,3 pour l'espèce B.
   Quelle sera la proportion de l'espèce en 2030 ? *Arrondir au centième.*

<u>Exercice 12</u> *D'après BAC*

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.
Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.
Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

— dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R;

— ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A;

— enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + B$ où $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.

b. Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Calculer PDP.

d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

On admet par la suite que $\boldsymbol{M^n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 3 \times 0{,}5^n - 3 \times 0{,}25^n \\ 0 & 0{,}25^n \end{pmatrix}}$.

3. Déterminer l'expression de U_n en fonction de n ; plus précisément, montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0{,}5^n + 9 \times 0{,}25^n + 10 \\ -3 \times 0{,}25^n + 4 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode générale du cours.

4. a. Monter que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.

b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

c. On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir poura la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.