Thème : Complexes et matrices **24/11/23**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous **forme algébrique**.

1. $\frac{\overline{z}-2i}{\overline{z}-1}+1+i=0$

2. $2z-3=4i+3\overline{z}$

3. $z^2=-36$

4. $z=-i\overline{z}$

Exercice 2

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-(2+i\sqrt{2})z^2+2(1+i\sqrt{2})z-2i\sqrt{2}$.

1. Montrer que $i\sqrt{2}$ est une racine de P.

2. **a)** Déterminer a, b et c tels que $P(z)=(z-i\sqrt{2})(az^2+bz+c)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$$

On pourra calculer $(1-\sqrt{2})$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z+\frac{1}{z}=1 \text{ et } z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$$

3. Soit $P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1$.

a) Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z=z+\frac{1}{z}$.

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

Exercice 4

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z)=z^2+2z+9$.

1. Calculer l'image de $-1+i\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=5$.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$. Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

<u>Exercice 5</u>

Soit $P(z) = z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z - 4$.

1. Calculer $P(2)$ et $P(-2)$.

2. Montrer que $P(z)$ peut s'écrire comme produit de deux polynômes du second degré dont l'un est $z^2 - 4$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

<u>Exercice 6</u> *Les questions sont indépendantes*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4x & -1 \\ 2x & y^3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -27 \end{pmatrix}$.

Déterminer x et y tels que $A = B$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 10 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -10 & 7 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice X telle que $-2X + 2B = A$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0.5 \\ -6 & 4 & 0.25 \\ 2 & 3 & -0.5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A \times B$.

b) Peut-on déterminer $B \times A$? *Justifier*

BONUS !

1. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ la matrice carrée d'ordre n. On appelle trace de A la somme des éléments diagonaux de la matrice A et on note $tr(A)$. On a donc :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0.5 \\ -6 & \frac{1}{3} & 0.25 \\ 2 & 3 & -0.5 \end{pmatrix}$, calculer $tr(A)$ en simplifiant au maximum.

2. Soit $z_0 = \frac{5+3i\sqrt{2}}{1-2i\sqrt{3}}$. Montrer que pour tout n entier naturel, $z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}(1 + i\sqrt{3})$.

Barème indicatif /25 Ex 1 : 4.5 Ex 2 : 3.5 Ex 3 : 7 Ex 4 : 3 Ex 5 : 4 Ex 6 : 3 Bonus : 2