Exercice 1 **5 points – 0,5 point par question**
Compléter sur l'énoncé par $\in$, $\subset$, $\notin$ ou $\not\subset$.

$2^{10} \in \mathbb{N}$ $\quad$ $10^{-12} \notin \mathbb{Z}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{81}{100}} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{36}}{2} \in \mathbb{N}$ $\quad$ $(-3)^7 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $0 \notin \mathbb{N}^*$

$\sqrt{7} \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\frac{2}{5} \in \mathbb{D}$ $\quad$ $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ $\quad$ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Exercice 2 *Les cinq questions sont indépendantes.* **6 points**

1. Donner la définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. **/0,5**
   $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{d}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}^*$ $\}$.
2. 171 est-il un nombre premier ? **/0,5**
   171 est un nombre car il est divisible par 9 (la somme de ses chiffres est 1+7+1=9 est divisible par 9).
3. Démontrer la propriété de cours suivante : « *Le nombre rationnel* $\frac{1}{3}$ *n'est pas un nombre décimal* ». **/1**
   On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est un décimal. D'où, il existe n et k tel que $\frac{1}{3} = \frac{n}{10^k}$ soit $3n = 10^k$, ce qui revient à dire que 10^k est divisible par 3.
   Cependant, $10^k = 100 \ldots 00$ (k zéros) donc la somme des chiffres de 10^k est égale à 1. D'où 10^k est non divisible par 3. Ce qui est absurde. On conclut que $\frac{1}{3}$ est n'est pas décimal.
4. Démontrer que si n est un entier impair alors $(2n+1)^2 + n + 3$ est impair. **/2**
   Soit n un entier impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.
   Donc $(2n+1)^2 + n + 3 = (2(2k+1)+1)^2 + 2k + 1 + 3 = (4k+3)^2 + 2k + 4$
   $= 16k^2 + 24k + 9 + 2k + 4 = 16k^2 + 26k + 12 + 1 = 2(8k^2 + 13k + 6) + 1 = 2p + 1$ où
   $p = 8k^2 + 13k + 6 \in \mathbb{N}$. On conclut que $(2n+1)^2 + n + 3$ est impair
5. **a)** Donner la définition d'une fraction irréductible. **/0,5**
   Une fraction est dite irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autre que 1 ou -1).

   b) Soit $A = \frac{8}{3} - \frac{\frac{5}{3}}{\frac{20}{21}}$. Calculer A sous la forme d'une fraction irréductible. **/1,5**

$$A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{21}{20} = \frac{8}{3} - \frac{21}{12} = \frac{32-21}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

Exercice 3 **4 points**
Soit ABCD un parallélogramme. Les points E et F sont tels que :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. **/1,5**

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \boxed{-\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$$

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. **/1,5**

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = \boxed{\frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}}$$

3. En déduire que les droites (CE) et (BF) sont parallèles. **/1**

On remarque que $-\frac{4}{3}\overrightarrow{CE} = -\frac{4}{3}\left(-\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$ soit $\boxed{\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CE}}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. Donc les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

Exercice 4 **5 points**
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ ***en simplifiant au maximum les solutions*** :

/1

$$(E_1) : \frac{1}{4}x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16$$
$$\boxed{S = \{-4\,;4\}}$$

/1,5

$$(E_2) : \frac{2x-5}{2-4x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x - 10 = 6 - 12x \Leftrightarrow 16x = 16 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\boxed{S = \{1\}}$$

/2,5

$$(E_3) : \frac{3x+2}{4+x} = \frac{4+x}{3x+2} \Leftrightarrow (3x+2)^2 = (4+x)^2 \Leftrightarrow (3x+2)^2 - (4+x)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x+2-4-x)(3x+2+4+x) = 0 \Leftrightarrow (2x-2)(4x+6) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x - 2 = 0 \text{ ou } 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \text{ ou } 4x = -6 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$
$$\boxed{S = \left\{1\,;-\frac{3}{2}\right\}}$$