Exercice 1

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Déterminer la matrice X telle que $AX = B$.

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ b - d = 0 \\ 2a + 3c = -7 \\ 2b + 3d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c + 4 \\ b = d \\ 5c = -15 \\ 5b = 10 \end{cases}.$$

On obtient donc « en cascade », $b = d = 2, c = -3, a = 1$. Soit $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$.

2. Déterminer la matrice X telle que $CX = 0_2$.

$$CX = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 6c = 0 \\ -2b + 6d = 0 \\ a - 3c = 0 \\ b - 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3c = 0 \\ b - 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3c \\ b = 3d \end{cases}.$$

Soit $\boxed{X = \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ c & d \end{pmatrix}}$ où $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 *Deux raisonnements par récurrence…*

1. Soit les matrices $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$.

En convenant de noter : $A = aI_2 + bN$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$A^n = a^n I_2 + na^{n-1}bN$.

Soit $P(n) = \{A^n = a^n I_2 + na^{n-1}bN\}, n \in \mathbb{N}$.

$P(0)$ est vraie car : $A^0 = I_2$ et $a^0 I_2 + 0 = I_2$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie. On a :
$A^{n+1} = A.A^n = A(a^n I_2 + na^{n-1}bN) = a^n A + na^{n-1}bAN = a^n(aI_2 + bN) + na^{n-1}b(aI_2 + bN)N = a^{n+1}I_2 + a^n bN + na^n bN + na^{n-1}b^2 \underbrace{N^2}_{0_2} = a^{n+1}I_2 + (n+1)a^n bN.$

Soit $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
On conclut que $\forall\, n \in \mathbb{N}, A^n = a^n I_2 + na^{n-1}bN$.

2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $B^2 = 3B - 2I_3$.

D'une part, $B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et d'autre part $3B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. L'égalité s'ensuit.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, B^n = (2^n - 1)B - (2^n - 2)I_3$.

Soit $P(n) = \{B^n = (2^n - 1)B - (2^n - 2)I_3\}, n \in \mathbb{N}$.

$P(0)$ est vraie car : $B^0 = I_3$ et $(2^0 - 1)B - (2^0 - 2)I_3 = I_3$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie. On a : $B^{n+1} = B.B^n = B\big((2^n - 1)B - (2^n - 2)I_3\big) = (2^n - 1)B^2 - (2^n - 2)B = (2^n - 1)(3B - 2I_3) - (2^n - 2)B = 3.2^n B - 2^{n+1}I_3 - 3B + 2I_3 - 2^n B + 2B = 2^{n+1}B - B - (2^{n+1} - 2)I_3 = (2^{n+1} - 1)B - (2^{n+1} - 2)I_3$.

Soit $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
On conclut que $\forall\, n \in \mathbb{N}, B^n = (2^n - 1)B - (2^n - 2)I_3$.

Exercice 3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - A - 2I_3$.

$A^2 - A - 2I_3 = 0_3$.

2. En déduire que la matrice A est inversible puis exprimer A^{-1} en fonction de A.

D'après ce qui précède, $A^2 - A - 2I_3 = 0_3$ soit :

$A^2 - A = 2I_3 \Leftrightarrow A\frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$. Donc A est inversible puisque l'on a $AB = I_3$ où $B = \frac{1}{2}(A - I_3)$

Soit $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)}$.

Exercice 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer a et b tels que $A^3 = aA + bA^2$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On en déduit que :

$\boxed{A^3 = 2A + A^2}$.

2. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la matrice A n'est pas inversible.

Supposons par l'absurde que la matrice A est inversible, alors on a :

$A^3 = 2A + A^2 \Leftrightarrow A^{-1}A^3 = A^{-1}(2A + A^2) \Leftrightarrow A^2 = 2I_3 + A$.

Or, $2I_3 + A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est une matrice différente de A^2. Absurde.

On conclut que A est n'est pas inversible.