Dans tous les exercices, sauf mention contraire le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit ABCD un carré de côté de 1, ABE et CBF sont deux triangles équilatéraux construits à l'aide du carré et à l'extérieur de celui-ci.

1. Réaliser une figure.

2. Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans le repère (A; B, D).

Exercice 2

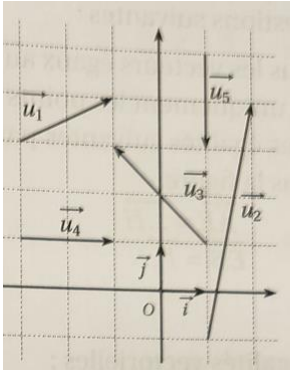
Soit ABCD un parallélogramme tel que AB=1 et BC=2, on note O son centre, E le point tel que $BE = \frac{1}{4}BC$ et F le point de [CD] tel que $CF = \frac{1}{4}CD$.

1. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (A; B, D).

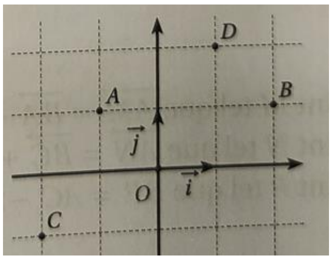
2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (O; C, D).

Exercice 3 *Lecture graphique*

1. Déterminer graphiquement les coordonnées des vecteurs tracés dans le repère ci-dessous :



2. Déterminer graphiquement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DC}$ dans le repère ci-dessous :



3. Soit les points $A(6\,;5), B(2\,;\,-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

a. Placer le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

b. Placer le point D tel que $\overrightarrow{DB} = \vec{u}$.

c. Déterminer graphiquement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CB}$

Exercice 4

1. Soit trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $-2\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{m}$ et $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$.

b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ tel que $2\vec{v} + 3\vec{w} = \vec{u}$.

c. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}$ tel que $\frac{1}{4}\,\vec{t} - \frac{1}{5}\vec{m} - \vec{u} = \vec{0}$.

2. Soit les points $A(1\,;2), B(-2\,;5)$ et $C(-3\,;\,-3)$.
   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA}$.
   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.
   c. Déterminer les coordonnées du vecteur $-\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 5

1. On considère les points $E\left(-\frac{9}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right), L\left(-1\,;\,-\frac{3}{2}\right), A\left(\frac{3}{2}\,;1\right)$ et $N(-2\,;2)$.
   Démontrer que ELAN est un parallélogramme.
2. On considère les points $M(-5\,;2), N(3\,;4), P(6\,;\,-7)$ et $R(-8\,;9)$.
   Le quadrilatère MPNR est-il un parallélogramme ? *Justifier*

Exercice 6

1. On considère les points $A(1\,;2), B(-2\,;5)$ et $C(-3\,;\,-3)$. Déterminer les coordonnées du point D tels que ABCD soit un parallélogramme.
2. On considère les points $A(3\,;\,-4)$ et $B(-1\,;2)$. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$.
3. On considère les points $M(\frac{2}{9}\,;\frac{6}{25})$ et $N(-\frac{5}{6}\,;\frac{9}{20})$. Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{MF}=\frac{15}{2}\overrightarrow{MN}$.
4. On considère les points $M(-4\,;2), N(0\,;3)$ et $P(1\,;\,-5)$. Déterminer les coordonnées du point Q tel que $\overrightarrow{MQ}=-3\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$.
5. On considère les points $G(-8\,;2), L(-3\,;3)$ et $M(1\,;\,-5)$. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{2MC}$.

Exercice 7

1. Déterminer dans chacun des cas suivants les coordonnées du milieu I du segment [AB] :
   a. $A(-3;2)$ et $B(1;-3)$.
   b. $A(2\sqrt{3};\sqrt{8})$ et $B(\sqrt{12};-\sqrt{32})$.
   c. $A(\frac{16}{3};-\frac{1}{7})$ et $B(\frac{2}{3};\frac{8}{7})$.
2. Déterminer les coordonnées du point B symétrique du point A par rapport à I dans les cas suivants :
   a. $A(-\frac{1}{2};2)$ et $I(\frac{1}{2};-\frac{1}{3})$.
   b. $A(-\frac{1}{4};-5)$ et $I(\frac{1}{4};-7)$.
   c. $A(2\sqrt{2};-\frac{1}{5})$ et $I(3\sqrt{2};-\frac{2}{3})$.

Exercice 8

1. Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants :
   a. $A(-1;-3), B(2;2)$ et $C(3;-2)$.
   b. $A(2;6), B(-4;2)$ et $C(-2;-1)$.
   c. $A(-5;0), B(5;2)$ et $C(0;5\sqrt{3})$.
   d. $A\left(-1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right), B(\sqrt{3}-1;\sqrt{3}-1)$ et $C(\sqrt{3}-1;3+\sqrt{3})$.
2. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(-4\,;2)$ de rayon 5. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à $\mathcal{C}$? *Justifier*
   a. $A(0\,;\,5)$.
   b. $B(-3\,;\,7)$.
   c. $C(-9\,;\,2)$.
   d. $D(-7\,;\,-2)$.

Exercice 9

1. On considère les points $D(-2;-1), E(15;-1)$ et $F(11;2\sqrt{13}-1)$.
   a. Démontrer que le triangle DEF est rectangle.
   b. Donner une valeur approchée à l'unité de l'angle $\widehat{EDF}$.
2. On considère les points $A(-3\,;1), B(7\,;1), C(1\,;4)$ et $H(1\,;1)$.
   a. Faire une figure.
   b. Démontrer que les triangles ACH et BCH sont rectangles.
   c. Calculer les valeurs des angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{CBH}$.
   d. En déduire que le triangle ABC n'est pas rectangle.

Exercice 10

On considère les points $A(0;12), B(-9;0)$ et $C(16;0)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Déterminer les coordonnées de I milieu de [BC]
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABDC soit rectangle.

Exercice 11

Soit les points $P(1\,;\,-2), A(7\,;2), I(-2\,;\,-4)$ et $N(5\,;\,-8)$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que P est le projeté orthogonal du point N sur la droite (AI).
3. Déterminer l'aire du triangle NIA.
4. En déduire la longueur de la hauteur du triangle NIA issue de A.

Exercice 12

On considère les points $A(6;-3)\ et\ B(-2;5)$.

1. Les points $E(1;0)$ et $F(-3;-3)$ appartiennent-ils à la médiatrice de [AB] ?
2. Déterminer le nombre réel t pour que le point $G(t;-2)$ appartienne à la médiatrice de [AB].

Exercice 13

1. On considère les points $A(3;2),\ B\left(-\frac{1}{2};0\right),C(-1;-4)\ et\ D(\frac{5}{2};-2)$. Démontrer que ABCD est un losange.
2. On considère les points $A(3;5),\ B(6;-2),C(-1;-5)\ et\ D(-4;2)$. Démontrer que ABCD est un carré.

Exercice 14

1. Soit les points $A(-2\,;1), B(-1\,;4)$ et $C(2\,;2)$. On considère les points P et Q définis par : $\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ}=-3\overrightarrow{AC}$.
   a. Déterminer les coordonnées des points P et Q.
   b. Démontrer que les droites (BC) et (PQ) sont parallèles.
2. Soit les points $A\left(-\frac{7}{2}\,;2\right), B(-2\,;5), C\left(5\,;\frac{13}{2}\right)$ et $D\left(3\,;\frac{5}{2}\right)$. On définit les points I, J et K par : $\overrightarrow{IA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$.
   a. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   b. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
   c. Les points I, B et C sont-ils alignés ? *Justifier*
   d. Les points I, J et K sont-ils alignés ? *Justifier*
3. Soit les points $A(-4\,;-3), B(-1\,;3)$ et $C(3\,;1)$.
   a. Faire une figure.
   b. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme puis, placer sur la figure.
   c. Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme ABCD.

d. Soit M le point défini par : $6\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{CB}$.
Démontrer que $\overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ puis placer le point M. Déterminer (par le calcul) les coordonnées du point M.

e. Les points D, I et M sont-ils alignés ? *Justifier*

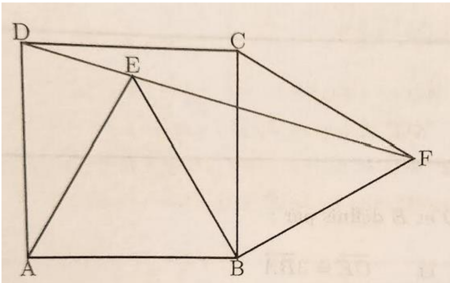
Exercice 15

Soit ABCD un carré de côté 4 cm. Les points E et F sont les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}\right)$ et $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{CB}$.

1. Faire une figure en vraie grandeur.
2. Quelle est la nature du repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$?
3. On se place dans la suite dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer les coordonnées de A, B et D.
4. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Puis, en déduire les coordonnées du point E.
5. Déterminer les coordonnées du point F.
6. Les points A, E et F sont-ils alignés ? *Justifier*

Exercice 16 *Vers la spécialité maths*

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré, ABE et BCF sont des triangles équilatéraux.



On se propose de démontrer que D, E et F sont alignés.

Pour cela, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

1. On note I le milieu de [AB]. Démontrer que $IE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$.
4. Conclure.
5. Calculer les valeurs exactes des longueurs DE, EF et DF.
6. En déduire que :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2}$$

Exercice 17 *Vers la spécialité maths*

On considère le parallélogramme OIJK. Les points A, B et C sont définis par : $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère adapté pour démontrer que les points O, G et J sont alignés.