GENERALITES SUR LES FONCTIONS 2

Les fonctions occupent un rôle central dans les programmes du lycée. Cette année, nous aborderons deux chapitres sur ce thème.

Histoire des mathématiques

« Fonction » est un mot qui apparaît en français sous les formes *funcion* (1370) puis *fonction* (1506), empruntées au latin classique *functio*, « accomplissement, exécution », et au bas latin juridique « service public, office ». *Function* dérive de la forme verbale *functum*, s'acquitter de, accomplir ». La première occurrence de « fonction » semble repérée à la fin du XII^{e} siècle (au sens de « exécution ») et à la fin du XVI^{e} siècle (lorsque le terme désigne l'exercice d'une charge). En relation avec les choses, « fonction » a, depuis, le sens général de « rôle actif caractéristique dans un ensemble » : fonctions cardiaques, cérébrales, de nutrition... C'est de la fin du XVII^{e} siècle que le mot apparaîtra avec une spécialisation comme terme de mathématiques. Désormais, celui-ci indique un type déterminé de relation de relations entre deux quantités (d'où son emploi *fonction inverse*) ou le sens de ce qui dépend de quelque chose (comme dans les locutions « en fonction de », « être fonction de ») et bien sûr les innombrables fonctions qui ont pris le nom de leur découvreur, de la fonction zêta de Riemann à la fonction singulière de Lebesgue en passant par la fonction de Dirichlet. Le terme sera ensuite employé dans divers domaines littéraires ou scientifiques comme en grammaire (1803), mécanique (1835), en chimie (1865), et par une extension tardive (début du XIX^{e} siècle) la profession qui contribue à la vie sociale. Le mot rentre dans des locutions comme « faire fonction de » (remplir une charge sans être titulaire) ou dans des expressions telles que le terme de droit « fonction publique » (XX^{e} siècle).
Aujourd'hui, les fonctions mathématiques sont cachées dans nos ordinateurs, smartphones et autres tablettes : un programme est une fonction. Une « appli » est une fonction. Le GPS utilise des fonctions, pour vous localiser comme pour calculer votre itinéraire. De même, tout calcul économique ou financier découle de l'application d'une fonction bien choisie. Tout semble pouvoir se mettre en équation !

D'après Bibliothèque Tangente, Les fonctions - HS n°56, Paris, éditions POLE, 2016.

I Définitions, vocabulaire et notations

Définition *Notion de fonction*

Schématiquement, on a :

$$\xrightarrow[\substack{x \in \mathscr{D} \\ antécédents}]{ENTRÉES = Input} \boxed{f} \xrightarrow[\substack{f(x) \in \mathbb{R} \\ Images}]{SORTIES = Output}$$

On pourra définir aussi une fonction de la façon suivante :

Remarques

1)

2)

Exemples
1) Soit g la fonction (affine) suivante : $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x+5 \end{array}$

2) Soit h la fonction (du 2nd degré) définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 1$.

Différentes façons de définir une fonction

➢ *Fonction définie par un tableau de valeurs*

Un commerçant applique sur les prix d'un modèle de chaise des tarifs dégressifs selon le nombre d'unités achetées.

Nombre de chaises	1	2	3	4	5	6	7	8 et plus
Prix unitaire (€)	99	97	94	90	86	82	78	75

Si l'on appelle U la fonction qui au nombre de chaises achetées associe le prix unitaire d'une chaise, on a

➢ *Fonction définie par un programme de calcul (algorithme)*

Voici un programme de calcul

- On choisit un nombre non nul x ;
- on lui ajoute 3 ;
- on élève le résultat obtenu au carré ;
- on retranche 9 ;
- on divise par le nombre de départ ;
- on retranche 5.

$y \leftarrow x+3$
$y \leftarrow x^2$
$y \leftarrow x-9$
$y \leftarrow \frac{y}{x}$
$y \leftarrow y-5$
retourner y

Soit A la fonction qui au nombre de départ choisi associe le résultat du programme.
En appelant x le nombre de départ, on a :

➢ *Fonction définie par une formule*
Voir les exemples ci-dessus.

➢ *Fonction définie par une courbe*
Voir paragraphe **II**.

Définition *Ensemble de définition*

Exemples
1) Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{2x-4}$.

2) Soit $g : \longmapsto \sqrt{1-3x}$.

Remarques
1)

2) Généralement, l'ensemble de définition d'une fonction est donné ou défini par le contexte. Si une fonction f est définie par une formule et si l'ensemble de définition n'est pas précisé alors D_f est, implicitement, l'ensemble $\mathbb{R}$.
3) On peut décider de restreindre de façon arbitraire l'ensemble de définition d'une fonction donnée. Par exemple, $f: [0; 2] - \{1\} \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t+1}{t-1}$; cette fonction n'est définie que pour des nombres de $[0; 2]$ privés de 1.

Dans la suite du cours, on notera l'ensemble de définition d'une fonction f, D_f qui est un ensemble de nombres (par exemple un intervalle).

II <u>Courbe représentative d'une fonction</u>

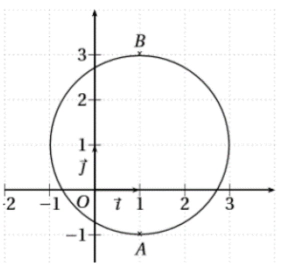
Définition *Représentation graphique*

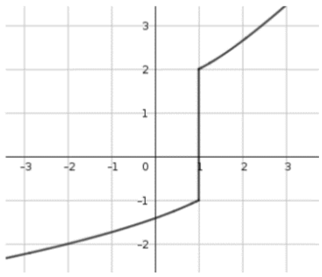
Propriété

Exemples
1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$.

2) Soit la même fonction f définie en 1) et prenons le point $A(a\,; 1) \in C_f$.

Remarques
1) On parle plus simplement de courbes de fonctions ou de graphes de fonctions.
2) Toute fonction peut être représentée par une courbe mais toute courbe n'est pas forcement la représentation graphique d'une fonction. En effet, tout réel x de D_f doit avoir une unique image donc deux points différents ne peuvent avoir la même abscisse.

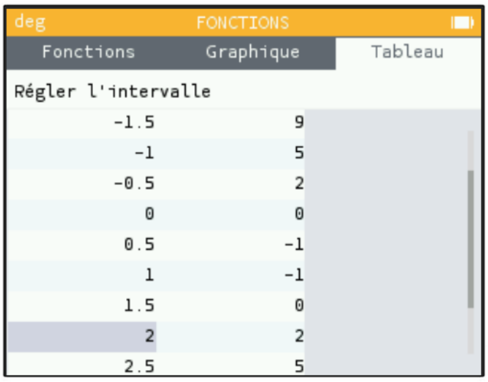




Les courbes ci-dessus ne représentent pas des fonctions. Pour celle de gauche, la courbe a plusieurs points ayant la même abscisse, comme $A(1; -1)$ et $B(1; 3)$ et pour celle de droite, il y a une infinité de points ayant une abscisse égale à 1.
Exemple

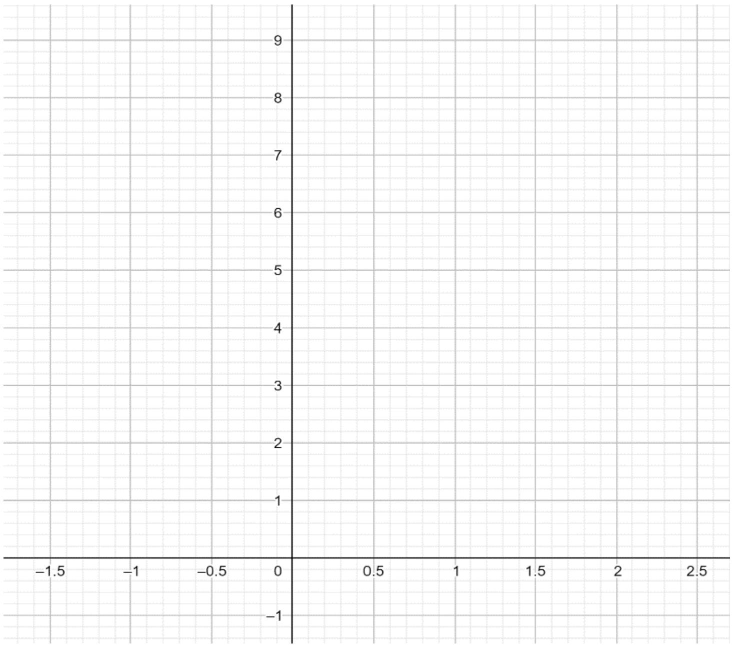
Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$. Dans la pratique, pour les fonctions définies par une expression algébrique, on s'aide du tableau de valeurs de la fonction que l'on peut obtenir à l'aide de la calculatrice afin de placer les points de coordonnées $(-1{,}5\,;9)$, $(-1\,;5)$, … , $(2{,}5\,;5)$. En reliant ses points, on obtient la courbe représentative C_f de la fonction f.

Tableau de valeurs



-1.5	9
-1	5
-0.5	2
0	0
0.5	-1
1	-1
1.5	0
2	2
2.5	5

Courbe représentative C_f de la fonction f



Un peu d'histoire des mathématiques

En latin « *curbus* » désignait ce qui est courbé. On retrouve le mot en ancien français sous la forme de « *corbe* ». Le corbeau est ainsi appelé à cause de son bec.

Exercice *Les trois traductions de $y = f(x)$*

Soit f une fonction définie sur D_f telle que $3 = f(-1)$.

Compléter les phrases suivantes :

1. Le nombre 3 est ……………………….. de -1 par f.

2. Le nombre -1 est ……………………………. de 3 par f.

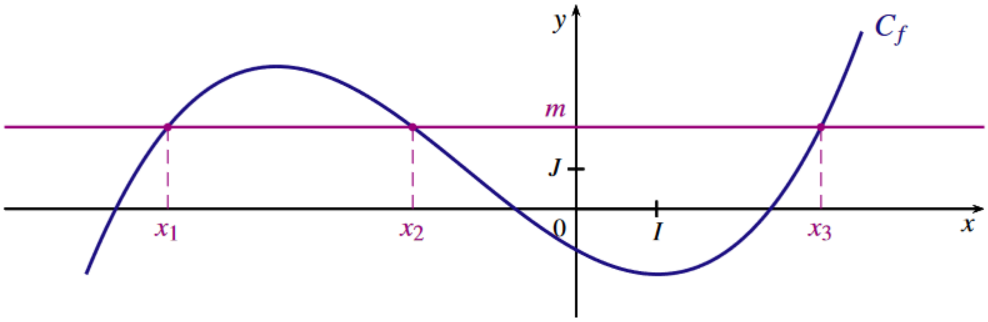
3. Le point de coordonnées ……………………… appartient à la courbe représentative de la fonction f.

III Résolution graphique d'équations et d'inéquations

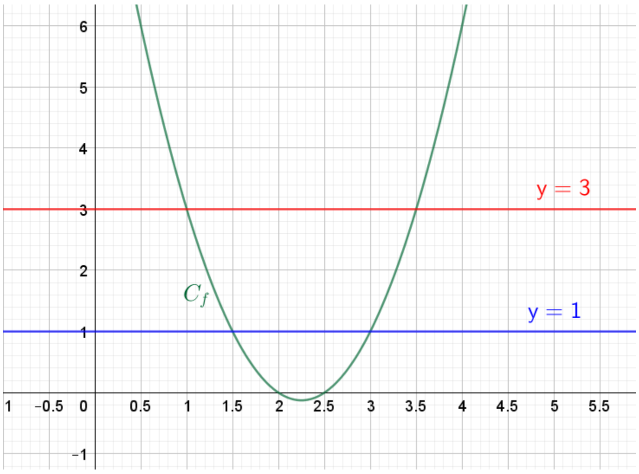
3.1 Comparaison entre $f(x)$ et un réel m

Dans un 1er temps, étudions la comparaison d'une fonction avec un réel. Soit C_f la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et m un réel.

Exemples
1)



2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$.

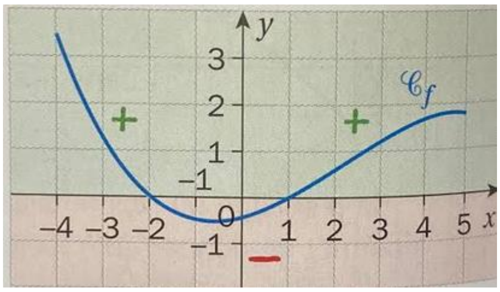


Remarque
Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Application pour obtenir le tableau de signes d'une fonction

Soit D_1, D_2 des ensembles de nombres.
Dresser graphiquement le tableau de signes d'une fonction f définie sur D_f et de courbe représentative notée C_f revient à étudier la position de C_f par rapport l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$).

Exemple
La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4\,;5]$.

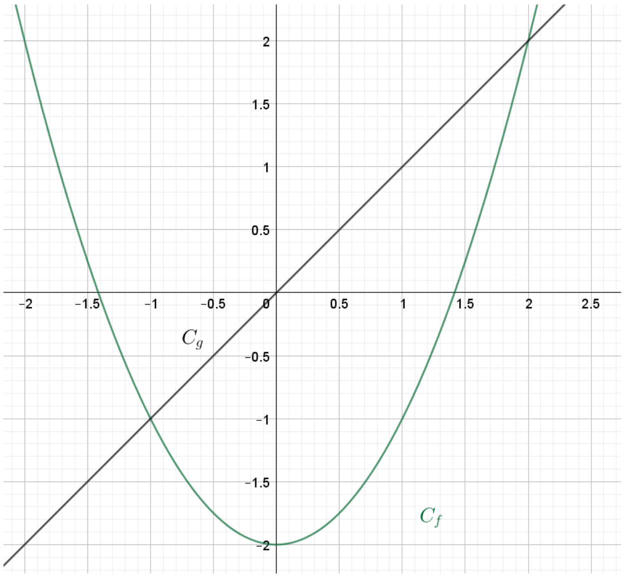


On est en mesure de dresser le tableau de signes de la fonction f :

3.2 <u>Comparaison entre $f(x)$ et $g(x)$</u>

Passons maintenant à la comparaison de deux fonctions. Soit C_g la courbe d'une fonction g.

Exemple
Soit $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$.



Remarque
Tous les résultats vus dans les exemples précédents concernant les équations et les inéquations graphiques sont considérés comme des **<u>conjectures</u>** et non comme des résolutions. On va donc voir maintenant un exemple qui traite d'une résolution, par le calcul, d'une équation et d'une inéquation mettant en jeu des expressions de fonctions.

Soit $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = x$.