Exercice 1 7 points

1. Préciser si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{9}{4}\\3\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{9}{4}\\-2 & 3\end{vmatrix} = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$. $\underline{\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont colinéaires}}$ **\1**

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}\sqrt{3} & -1\\-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\end{vmatrix} = \sqrt{3}(1-\sqrt{3}) - \sqrt{3} = \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = -3 \neq 0$. $\underline{\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ ne sont pas colinéaires.}}$ **\1**

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{7}-\sqrt{3}\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{7}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}\sqrt{7}-\sqrt{3} & -\sqrt{2}\\-2\sqrt{2} & \sqrt{7}+\sqrt{3}\end{vmatrix} = (\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3}) - 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4 - 4 = 0$. $\underline{\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont colinéaires.}}$ **\1**

2. Déterminer l'ensemble des valeurs de x tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, dans chacun des cas suivants :

Tout d'abord, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires on a $\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1-x\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1-x & -5\\6 & 2\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(1-x) + 30 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x + 30 = 0 \Leftrightarrow 2x = 32 \Leftrightarrow \boxed{x = 16}$. **\1**

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1-x\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\1+x\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1-x & -8\\10 & 1+x\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) + 80 = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 + 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 81 \Leftrightarrow$ $\boxed{x = 9 \text{ ou } x = -9}$. **\1.5**

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2-3x\\1+x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4-3x\\1+x\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}2-3x & 4-3x\\1+x & 1+x\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-3x)(1+x) - (1+x)(4-3x) = 0$

$\Leftrightarrow (1+x)(2-3x-4+3x) = 0 \Leftrightarrow -2(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$ **\1.5**

Exercice 2 7 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points suivants :
$A\left(-\frac{1}{2}\,;5\right), B\left(\frac{11}{2}\,;1\right), C(1\,;-3)$ et $E\left(\frac{3}{2}\,;\,-5\right)$.

1. Placer ces quatre points dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Cf figure en fin de correction. **\0.5**

2. Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer ce point D et tracer le parallélogramme.

Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Soit $D(x\,;y)$. Alors, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-x\\-3-y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}6 = 1-x\\-4 = -3-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -5\\y = 1\end{cases}$. Donc $\boxed{D(-5\,;1)}$. **\1.5**

3. Calculer les coordonnées du centre M du parallélogramme ABCD puis placer ce point.

M est le centre du parallélogramme et donc plus précisément, M est le milieu de [AC] (aussi de [BD]).

$x_M = \frac{-\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ et $y_M = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ donc $\boxed{M(\frac{1}{4}\,;1)}$. **\1.5**

4. Les points A, M et E sont-ils alignés ?

Sur la figure, cela n'a pas l'air… Montrons-le :

Considérons les vecteurs, $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AE}$: $\det(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AE}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 \\ -4 & -10 \end{vmatrix} = -\frac{15}{2} + 8 = \frac{1}{2} \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires. Il s'ensuit que les points A, M et E ne sont pas alignés. **\1.5**

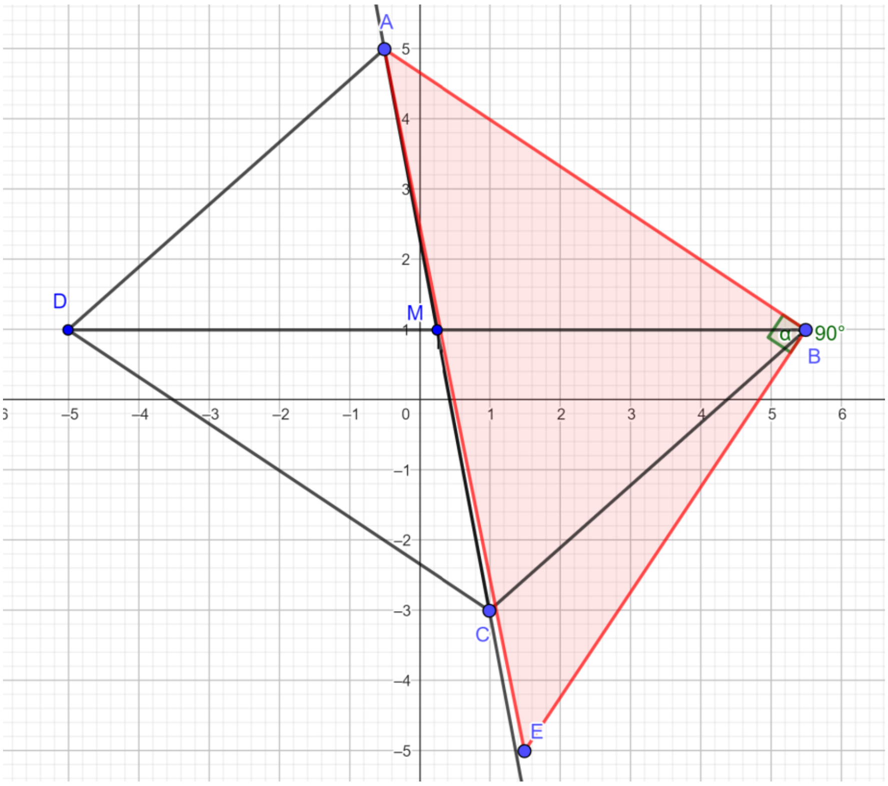
5. Déterminer la nature du triangle ABE.

$AB^2 = 36 + 16 = 52$, $AE^2 = 4 + 100 = 104$ et $BE^2 = 16 + 36 = 52$.

On constate d'une part que $AB = BE$, ABE est donc isocèle. Et d'autre part, on remarque que $AB^2 + BE^2 = AE^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABE est rectangle en B. On conclut que le triangle ABE est rectangle isocèle en B. **\1.5**

6. Calculer l'aire du triangle ABE.

$\mathcal{A}(ABE) = \frac{AB\times BE}{2} = \frac{\sqrt{52}\sqrt{52}}{2} = \frac{52}{2} = \boxed{26\,u.a}$. **\0.5**



Exercice 3 **6 points**

Pour chacune des questions suivantes, **une réponse et une seule** parmi les quatre est correcte.
Sur votre copie, indiquer le numéro de la question ainsi que la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point ; une mauvaise réponse et l'absence de réponse n'enlèvent pas de point.

1. Soit $D(2\,;4)$ et $F(5\,;\,-2)$. Le point M tel que $\overrightarrow{FM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées :

A. $(7\,;\,-2)$ **B.** $(3\,;2)$ **C.** $(\frac{11}{3}\,;\,-\frac{14}{3})$ **D. Autre**

2. Soit $x \neq 0$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ \frac{1}{x^2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x^3\\ x(\sqrt{2}+1)\end{pmatrix}$.

A. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

B. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

C. On a : $\sqrt{2}\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{x^2}\end{pmatrix}$

D. On a : $-\sqrt{2}\vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}x^3\\ -2x-1\end{pmatrix}$

3. Soient $A(4;-2), B(-12;7)$ et $C(9;-6)$. Soit D défini par $3\overrightarrow{DC}+5\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$.
Les coordonnées de D sont :

A. $(\frac{39}{4};13)$ **B.** $(\frac{39}{2};-13)$ **C. $(-\frac{39}{2};13)$** **D.** $(-\frac{39}{2};-13)$

4. Soient $A(-1;4), B(1;\frac{10}{3})$ et $C\left(6;\frac{5}{3}\right)$. Quelle affirmation est vraie ?

A. $A \in [BC]$ **B.** A, B et C ne sont pas alignés **C.** C est le milieu de $[AB]$

D. $B \in (AC)$

5. Soient $A(-1;0), B(9;-2)$ et $C(5;4)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

A. Uniquement rectangle **B. Isocèle et rectangle** **C.** Quelconque

D. Uniquement isocèle

6. On considère un parallélogramme ABCD. Les points M, N et P sont définis par :
$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

A. Les points M, N et C sont alignés **B.** AMPN est un parallélogramme

C. Les points A, N et C sont alignés **D.** M est le milieu est le milieu de [AB]

BONUS !

Soit ABC un triangle tel que $AB=\sqrt{2}-1, AC=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ et $BC=2-\sqrt{2}$.
Déterminer la nature du triangle ABC.