Exercice 1 **6 points**

Soit les matrices $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. En résolvant le système $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et en supposant que P est inversible montrer que

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad /1.5$$

$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = a + b + c \quad L_1 \leftarrow L_2 + L_3 \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases}$ donc $x = \frac{1}{3}(a + b + c)$ puis par $L_2 : y = b - x = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c$. Et enfin par $L_3 : z = c - x = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c$.

On en déduit que comme $X = P^{-1}Y$, $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

2. Calculer $D = P^{-1}AP$.

On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **\0.5**

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$. **\1 (0.25+0.5+0.25)**

Soit pour n entier naturel $P(n) : \{n \in \mathbb{N} : \ A^n = PD^nP^{-1}\}$. Tout d'abord, d'après la question précédente on a : $A = PDP^{-1}$. D'une part, $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour n entier naturel. On a $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. La propriété est donc vraie au rang n+1. Donc pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. On considère les trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par récurrence, pour u_0, v_0 et w_0 des réels, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{v_n + w_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + w_n}{2}, n \in \mathbb{N} \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer une relation matricielle entre U_{n+1} et U_n. **\0.5**

On a clairement $U_{n+1} = AU_n$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

b) Déterminer l'expression de U_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0. *Indication : Déterminer A^n* **\1.5**

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = A^nU_0$. Or d'après la question 3, $A^n = PD^nP^{-1}$

Soit : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Enfin, $U_n = A^n U_0 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0+v_0+w_0+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2u_0-v_0-w_0) \\ u_0+v_0+w_0+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2v_0-u_0-w_0) \\ u_0+v_0+w_0+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2w_0-u_0-v_0) \end{pmatrix}}$

c) La suite (U_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite. **\1**

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on en en déduit que la suite (U_n) converge vers $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0+v_0+w_0 \\ u_0+v_0+w_0 \\ u_0+v_0+w_0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 **7 points**

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour côté x et $x+1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des nombres entiers non nuls.

Dans cette situation, on dit que le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI.

1. Démontrer que le couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels non nuls définit un TRPI si, et seulement si $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$. **\1**

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$ définit un TRPI alors d'après le théorème de Pythagore, on a $x^2 + (x+1)^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 + 2x + 1$. L'équivalence est bien prouvée.

On admet par la suite que le TRPI ayant les plus petits côtés est défini par le couple $(3\,;5)$.

2. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

x et y désignent deux nombres entiers naturels non nuls ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y. **\1**

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y + 2 \end{cases}}$

b) Montrer que $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$. **\2**

$y'^2 - 2x'(x'+1) = y'^2 - 2x'^2 - 2x' = (4x+3y+2)^2 - 2(3x+2y+1)^2 - 2(3x+2y+1) = 16x^2 + 24xy + 16x + 9y^2 + 12y + 4 - 2(9x^2 + 12xy + 6x + 4y^2 + 4y + 1) - 6x - 4y - 2 = 16x^2 + 24xy + 10x + 9y^2 + 8y - 18x^2 - 24xy - 12x - 8y^2 - 8y = y^2 - 2x^2 - 2x = \boxed{y^2 - 2x(x+1)}$.

c) En déduire que si le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x'\,;y')$ définit également un TRPI. **\1**

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$ définit un TRPI. Alors d'après la question 1, $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$ soit

$y^2 - 2x(x+1) = 1$. Or, d'après ce qui précède, $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1) = 1$ soit $y'^2 - 2x'(x'+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow y'^2 = 2x'^2 + 2x' + 1$. Donc le couple $(x'; y')$ définit également un TRPI.

3. On considère les suites (x_n) et (y_n) d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3, y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI. **\1 (0.25+0.5+0.25)**

On pose $Q(n) = \{n \in \mathbb{N}$: le couple $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI$\}$. Pour $n = 0$, le couple $(3 ; 5)$ définit bien un TRPI d'après l'énoncé. $Q(0)$ est donc vraie. Supposons pour $n \in \mathbb{N}$, que $Q(n)$ est vraie. Alors, on a : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$. Or, comme $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI, par la question 2.c), on peut affirmer que le couple $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ définit un TRPI. $Q(n+1)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ le couple $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI.

b) Déterminer le couple $(x_2 ; y_2)$. **\1**

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 29 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 173 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{(x_2 ; y_2) = (122 ; 173)}$

Exercice 3 **10 points**

Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne.
Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé. Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.
Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
On constate que, chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.
De plus, chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.
On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n).
Pour tout entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement le nombre de débutants et le nombre d'avancés au début du mois n. Pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. **a)** Déterminer U_0. **\0.5**

$U_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix}$

b) Justifier que pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + \frac{1}{2} a_n + 70 \end{cases}$$ **\0.5**

A chaque mois, la moitié du groupe des débutants reste dans ce groupe et l'on accueille 100 nouveaux donc $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + 100$. Concernant le groupe des avancés, l'autre moitié des débutants arrive dans ce groupe, la moitié du groupe des avancés se désinscrit et l'on accueille 70 nouveaux donc $a_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + \frac{1}{2} a_n + 70$.

c) Déterminer les matrices A et B telles que, que pour tout pour entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$. **\1**

On a : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$ où $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **\3 (0.5+2+0.5)**

On pose $R(n) = \{n \in \mathbb{N} : A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)\}$. Pour $n = 0$, d'une part $A^0 = I_2$ et d'autre part $\left(\frac{1}{2}\right)^0 (I_2 + 0.T) = I_2$. $R(0)$ est donc vraie. Supposons pour $n \in \mathbb{N}$, que $R(n)$ est vraie.

$$A^{n+1} = A^n A = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)A = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (I_2 + (n+1)T)$$

$R(n+1)$ est vraie. On conclut que pour tout entier naturel n, $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$.

3. Déterminer l'expression de U_n en fonction de n. **\3**

Déterminons la matrice U telle que $U = AU + B$ soit $U - AU = B \Leftrightarrow (I_2 - A)U = B$

Or, $I_2 - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\det(I_2 - A) = \frac{1}{4} \neq 0$, la matrice est donc inversible et $U = (I_2 - A)^{-1}B$

Avec $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. D'où : $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$. On pose $V_n = U_n - U$. A l'aide de : $U_{n+1} = AU_n + B$ et $U = AU + B$, on sort (en faisant la différence membre à membre) : $U_{n+1} - U = A(U_n - U) \Leftrightarrow V_{n+1} = AV_n$. On en déduit que pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0 = A^n(U_0 - U)$. Soit $U_n = V_n + U = A^n(U_0 - U) + U = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)(U_0 - U) + U$.

Plus précisément, on obtient matriciellement :

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}}.$$

4. *On admet que pour tout entier naturel* $n \geq 4, 2^n \geq n^2$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4, 0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$. **\1**

Supposons que pour tout entier naturel $\mathrm{n} \geq 4, 2^{\mathrm{n}} \geq \mathrm{n}^2$. Alors, $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$ puis $0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100n}{n^2} = \frac{100}{n}$. <u>L'encadrement est bien montré</u>.

5. Etudier la convergence de la suite (U_n). Que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site à long terme ? **\1**

D'après ce qui précède, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (puisque $\frac{100}{n} \to 0$). Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. ON peut donc affirmer que la suite (U_n) converge vers $U = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$. A long terme, on estime qu'il y aura 200 internautes de niveau débutant et 340 internautes de niveau avancé.

<u>Exercice 4</u> 7 points

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice A^2. **\1**

On a $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}}$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un nombre a_n tel que A^n est de la forme : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1 + a_n \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^{n+1}. **\1.5**

$$A^{n+1} = A^n.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4a_n & -5+4a_n & 6-4a_n \\ 3-2a_n & -3+2a_n & 4-2a_n \end{pmatrix}$$

b) En déduire la relation : $a_{n+1} = 3 - 2a_n$. **\1**

Puisque $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_{n+1} & 1-2a_{n+1} & 2a_{n+1} \\ a_{n+1} & -a_{n+1} & 1+a_{n+1} \end{pmatrix}$, on en déduit $a_{n+1} = 3 - 2a_n$ au regard de la question 2.a).

3. Soit la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $b_n = a_n - 1$.

a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. **\1.5**

$b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = 3 - 2a_n - 1 = 2 - 2a_n = 2(1 - a_n) = -2b_n$. La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison -2 et de 1er terme $b_1 = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2$.

b) Déterminer l'expression de b_n, puis de a_n en fonction de n. **\1**

D'après ce qui précède, pour tout $n \geq 1$, $b_n = -(-2) \times (-2)^{n-1} = \boxed{-(-2)^n}$. Et, $\boxed{a_n = 1 - (-2)^n}$.

4. En déduire A^n en fonction de n. **\1**

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-2(-2)^n & -1+2(-2)^n & 2-2(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & 2-(-2)^n \end{pmatrix}}$$

Soit $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+1} & -1-(-2)^{n+1} & 2+(-2)^{n+1} \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & 2-(-2)^n \end{pmatrix}}$