I Ensemble des nombres complexes

1.1 Définitions et propriétés

Définition

Exemples

Vocabulaire
1) L'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe est
2) Le nombre a s'appelle la et le nombre b s'appelle la
On note :

Remarques
1) Si $b = 0$,
2) Si $a = 0$,

Histoire des mathématiques

Les nombres complexes prennent naissance au XVIe siècle lorsqu'un italien Gerolamo Cardano (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de Jérôme Cardan, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du 3ème degré. En 1572, un autre italien, Rafael Bombelli (1526 ; 1573) publie *Algebre, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri* dans lequel il présente des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de Cardan sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré. A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.
La notation i apparaît en 1777 avec Leonhard Euler (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires. Au XIXe siècle, Gauss puis Hamilton posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

Propriété *Egalité dans* $\mathbb{C}$
Soit a, b, a', b' des réels tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Alors :

Démonstration admise

Remarque

1.2 Additions et multiplications dans $\mathbb{C}$

D'après les propriétés de $\mathbb{C}$, on additionne et on multiplie dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, **en tenant compte que $i^2 = -1$**. En particulier, les identités remarquables se prolongent à $\mathbb{C}$.
Voici ci-dessous, des exemples pour comprendre comment on procède :

1.3 Formule du binôme dans $\mathbb{C}$

Quelques observations

z et z' désignent deux nombres complexes.

• $(z+z')^2 = z^2+2zz'+z'^2 = \mathbf{1}z^2+\mathbf{2}zz'+\mathbf{1}z'^2$

• $(z+z')^3 = (z^2+2zz'+z'^2)(z+z') = z^3+z^2z'+2z^2z'+2zz'^2+z'^2z+z'^3$

soit $(z+z')^3 = z^3+3z^2z'+3zz'^2+z'^3 = \mathbf{1}z^3+\mathbf{3}z^2z'+\mathbf{3}zz'^2+\mathbf{1}z'^3$.

On observe que les coefficients qui figurent aux lignes $n=2$, $n=3$, du triangle de Pascal fournissent les coefficients (en rouge) obtenus dans les développements ci-dessus. On peut conjecturer alors que :

$$(z+z')^4 = \mathbf{1}z^4+\mathbf{4}z^3z'+\mathbf{6}z^2z'^2+\mathbf{4}zz'^3+\mathbf{1}z^4.$$

On peut vérifier que cette conjecture est vraie en procédant comme ci-dessus avec des développements. En fait, on démontre ci-après une formule générale permettant de développer $(z+z')^n$.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On appelle $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial p parmi n. Chaque nombre du triangle de Pascal est un coefficient binomial (ex : $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{5}{4} = 5$). Le triangle de Pascal est obtenu de la façon suivante : on convient que $\binom{0}{0} = 1$; on place des 1 dans la colonne « $p = 0$ » du fait que $\binom{n}{0} = 1$; on place des 1 sur la diagonale du fait que $\binom{n}{n} = 1$; on obtient un autre nombre du tableau en additionnant le nombre juste au-dessus et celui à gauche d'après la relation de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$. *Le « coefficient binomial » sera abordé dans le cours de spécialité mathématiques dans les chapitres « Succession d'épreuves indépendantes » (de manière pratique) et « Combinatoire et dénombrement » (de manière théorique).*

Théorème *Formule du binôme*
Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

Démonstration ***exemplaire***

Exemple
Soit $z \in \mathbb{C}$, déterminons l'expression $(1+z)^5$.

II Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définitions et propriétés algébriques

Définition Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

Exemples
1)
2)
3)

Propriétés Soit z un nombre complexe.

Démonstrations en exercice

Exemple
Soit l'équation $6\bar{z} - 12 + 6i = 10\bar{z} - 16 - 2i$.

Dans le cas d'équations où z et $\bar{z}$ interviennent simultanément, poser $z = a + ib$ (voir l'exercice ci-dessous).

Exercice 1

1. Déterminer la forme algébrique de $z_1 = \frac{1}{(1+i)(2-i)}$ et $z_2 = \left(\frac{1-2i}{1+i}\right)^2$.

2. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $z = (\beta + i)(\beta - 1 + 2i)$.
Trouver les valeurs de β pour que z soit un imaginaire pur.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z + i\bar{z} = -1 + 4i$.

2.2 Inverse et quotient

Définitions Soit z et z'deux nombres complexes

Méthode pour calculer un inverse et un quotient d'un nombre complexe
Pour mettre sous forme algébrique un inverse ou un quotient, l'idée est de multiplier en haut en en bas par la forme conjuguée du dénominateur. Pourquoi ? Car la propriété (vi)($z.\bar{z} = a^2 + b^2$) sur les conjugués transforme le dénominateur en un réel.
Soit $z = 2 - 4i$ et $z' = 4 + 3i$.

Exercice 2
On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. **a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n?
   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas?*

2.3 Conjugués et opérations

Propriétés Pour tous nombres complexes z, z' et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

Démonstrations de (iii), (iv) et (v) ***exemplaires***

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

(i)
$$\begin{aligned}\overline{z+z'} &= \overline{a+ib+a'+ib'} \\ &= \overline{a+a'+i(b+b')} \\ &= a+a'-i(b+b') \\ &= a-ib+a'-ib' \\ &= \overline{a+ib}+\overline{a'+ib'} \\ &= \bar{z}+\overline{z'}\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\overline{z\times z'} &= \overline{(a+ib)\times(a'+ib')} \\ &= \overline{aa'+iab'+iba'+i^2bb'} \\ &= \overline{aa'-bb'+i(ab'+ba')} \\ &= aa'-bb'-i(ab'+ba')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z}\times\overline{z'} &= \left(\overline{a+ib}\right)\times\left(\overline{a'+ib'}\right) \\ &= (a-ib)\times(a'-ib') \\ &= aa'-iab'-iba'+i^2bb' \\ &= aa'-bb'-i(ab'+ba')\end{aligned}$$

Donc l’égalité s’ensuit.

Exemples

Déterminons le conjugué des nombres suivants $z_1 = (2-i)(i-5)$ et $z_2 = \frac{3+2i}{i}$.

III Equations polynômiales de degré supérieur ou égal à 2

3.1 Equations du 2nd degré à coefficients réels

Propriété

Démonstration

Exemple

Propriété et définition Considérons l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. On appelle $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$.

Signe de Δ	$\boldsymbol{\Delta > 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\Delta < \mathbf{0}$
Solutions de $(\boldsymbol{E})$ **dans** $\mathbb{C}$			
Forme factorisée			

Démonstration

Pour tout complexe z, $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ revient à résoudre l'équation $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ car $a \neq 0$.

- Si $\Delta = 0$, $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ équivaut à $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $z = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors d'après la propriété ci-dessus $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

soit $z = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarques

1)

2)

Exemples

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + 3z + 4 = 0$.

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

3.2 <u>Polynômes de degré n</u>

Définition

Vocabulaire

Exemples

Propriété Soit n un entier naturel non nul et a un nombre complexe.

Démonstration ***exemplaire***

Exemple

Corollaire Soit P un polynôme de degré n.

Démonstration ***exemplaire***

Exemple
Soit l'équation $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.

Exercice 3

Soit le polynôme $P(z) = z^3 + (-6+i)z^2 + (13-6i)z + 13i$.

1. Montrer que $-i$ est une racine de P.
2. En déduire une factorisation de P.

Corollaire

*Démonstration **exemplaire***

Initialisation : pour $n = 1$, le polynôme est défini par $P(z) = az + b$ avec a et b nombres réels, a non nul.
Il admet exactement une racine $z = \frac{-b}{a}$. La propriété est donc vraie dans ce cas.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, on a prouvé que tout polynôme de degré k admet au plus k racines. On considère alors un polynôme P de degré $k+1$.
Si P n'admet aucune racine, alors la propriété est vraie pour ce polynôme,
Si P admet une racine a, alors d'après le théorème précédent, il existe un polynôme Q tel que, pour tout complexe z, $P(z)=(z-a)Q(z)$. On admet que Q est de degré k. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, Q admet au plus k racines. Par conséquent, le polynôme P, qui admet éventuellement la racine supplémentaire a (qui peut être déjà une racine de Q), admet au plus $k+1$ racines.
On a ainsi prouvé que la propriété est vraie pour tout polynôme de degré $k+1$.
Conclusion : tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ admet au plus n racines.

Exercice 4
Soient a, b, c trois complexes distincts.
On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = \frac{(z-a)(z-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(z-b)(z-c)}{(a-c)(a-b)} + \frac{(z-a)(z-c)}{(b-a)(b-c)}$$

1. Déterminer le degré de P.
2. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.
3. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{C}$ par $Q(z) = P(z) - 1$.
   a. Donner le nombre de racines de Q.
   b. Déterminer ces racines.
   c. En déduire l'expression simplifiée de P.

Propriété *Formules de Viète*

Démonstration en exercice (voir le n°148 p 46)

Exemple
Soit $P(z) = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2 où les deux racines sont $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ et $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.