<u>Exercice 1</u> *Des questions indépendantes*

1. **a.** Dans le plan complexe placer les points suivants $A(3+2i), B(-5+2i)$ et $C(-3i)$.
b. Déterminer les affixes du milieu A' du segment [BC] ainsi que celle de B' milieu du segment [AC].
c. Déterminer l'affixe du point G défini par $2\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA}=0$.
d. Démontrer que les points B, G et B' sont alignés.

2. **a.** Dans le plan complexe, placer les points suivants $A(3+i), B(7+3i), C(8-2i)$ et $D(4-4i)$.
b. Conjecturer la nature du quadrilatère ABCD puis le démontrer.
c. Soit E l'image de A par la translation de vecteur $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et F l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}+5\overrightarrow{DA}$.
(i) Montrer que les points F, B et C sont alignés.
(ii) Montrer que les points D, E et F sont alignés.
(iii) Que peut-on en déduire pour le point F ?

3. Dans le plan complexe, on donne $A(-2+2i), B(-i), C(5)$ et $D(3+3i)$.
a. Calculer les longueurs AB, BC, CD et DA.
b. Justifier la nature du quadrilatère ABCD.
c. Démontrer ce résultat d'une autre manière.

4. Dans le plan complexe, on donne $A(-1+5i), B(3+i)$ et $M(-5-3i)$.
a. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.
b. Démontrer que le point M appartient à la médiatrice du segment [AB].

5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
a. $|2iz+2+i|=3$;
b. $|z+1+i|=|z-2-i|$.

<u>Exercice 2</u>

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des nombres complexes non nuls z tels que les points A, N et P d'affixes respectives 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés.

1. On pose $z=-\frac{1}{2}+i$.
a. Déterminer la forme algébrique de z^2, puis de $\frac{1}{z}$.
b. Calculer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ et en déduire que les points A, N et P sont alignés.

2. **a.** Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul : $z^2-\frac{1}{z}=(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right)$
b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires si, et seulement si, z^2+z+1 est un nombre réel.

3. On pose $z=x+iy$ avec x et y deux nombres réels.
a. Déterminer la forme algébrique de z^2+z+1.
b. Préciser alors l'ensemble $\mathcal{F}$.

<u>Exercice 3</u> *Des questions indépendantes*

1. Soit $z_1=2\sqrt{3}-2i$ et $z_2=-1+i$.
a. Calculer le module et un argument de ces deux nombres complexes.
b. En déduire le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a=iz_1\ ;b=z_1z_2\ ;c=z_2^2\ ;d=-\frac{2}{z_1}\ ;e=\frac{z_1}{z_2}\ ;f=\frac{z_1^6}{z_4^4}.$$

2. Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{5i}{1+i}\ ;z_2=(1-i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\ ;z_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\ ;z_4=(1-i)^{2020}.$$

3. Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

$$z_1=\frac{-7+7i}{2\sqrt{3}+2i}\ ;z_2=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^6}{(5+5i)^4}\ ;z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$

4. On considère le nombre complexe $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

a. Calculer a^2 puis mettre sous forme trigonométrique.

b. En déduire une forme trigonométrique de a.

c. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de :

$$\cos\frac{7\pi}{12}; \sin\frac{7\pi}{12}\ ; \cos\frac{\pi}{12}\ \text{et}\ \sin\frac{\pi}{12}.$$

<u>**Exercice 4**</u> *Des questions indépendantes*

1. On pose $z=-5-5i\sqrt{3}$.

a. Mettre sous forme exponentielle z.

b. Démontrer que z^9 est égal à un milliard.

c. Démontrer que $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{100}{z^2}$.

d. Donner la forme algébrique du nombre complexe $z'=iz^{13}$.

2. a. Déterminer une écriture exponentielle de $u=1-i$.

b. Déterminer, pour tout nombre réel θ, la forme algébrique et une écriture exponentielle de $e^{i\theta}(1-i)$.

c. Déduire des questions précédentes, que pour tout réel θ, $\cos\theta+i\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Soit f la fonction qui à tout complexe non nul z, associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z)=z+\frac{1}{z}.$$

a. Dans chaque cas, déterminer une forme exponentielle de a, puis la forme algébrique de $f(a)$.

(i) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ii) $a=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Démontrer que pour tout complexe z de module 1, $f(z)$ est un nombre réel.

4. a. Démontrer que $e^{ip}+e^{iq}=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}$

b. En déduire que :

(i) $\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(ii) $\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

5. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

a. $z_1=-\cos\theta-i\sin\theta$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.

b. $z_2=-\cos\theta+i\sin\theta$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.

c. $z_3=\sin\theta+i\cos\theta$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.

d. $z_4=1+e^{i\theta}$ avec $\theta\in\,]0\,;\,\pi[$.

e. $z_5=\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$ avec $\theta\in\,]0\,;\,\pi[$.

f. $z_6=\overline{\left(1+e^{i\theta}\right)}^2$ avec $\theta\in\,]0\,;\,\pi[$.

6. a. Montrer que $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0$.

En déduire que $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

b. (i) Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=4\cos^2\frac{\pi}{5}-2$. *Indication : Utiliser la formule* $\cos 2a=2\cos^2 a-1$.

(ii) Montrer que $\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} = -2\cos\frac{\pi}{5}$.

(iii) En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$. *Indication : Etablir une équation du 2^nd degré.*

Exercice 5

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a)** Calculer z_1, z_2 et z_3.

   b) Écrire le nombre complexe $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.

   c) Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_0A_1$ est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   La suite (r_n) est-elle convergente ?
   Interpréter géométriquement le résultat précédent.
   On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.
   Ainsi $L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. **a)** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

   b) Donner une expression de L_n en fonction de n.

   c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n - \mathrm{i}.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
On note B le point d'affixe 1.

1. **a.** Montrer que $z_1 = -\mathrm{i}$ et que $z_2 = 1 - 2\mathrm{i}$.

   b. Calculer z_3.

   c. Sur la copie, placer les points B, A_1, A_2 et A_3 dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

   d. Démontrer que le triangle $\mathrm{B}A_1A_2$ est isocèle rectangle.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n - 1|$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$.

   b. Déterminer à partir de quel entier naturel n, la distance $\mathrm{B}A_n$ est strictement supérieure à 1 000. On détaillera la démarche choisie.

3. **a.** Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $1+\mathrm{i}$.

   b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $z_n = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}$.

   c. Le point A_{2020} appartient-il à l'axe des abscisses ? Justifier.

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition : $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
2. **Proposition :** L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est une droite.
3. Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   Proposition : La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est : $\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$
4. **Proposition :** Le point d'affixe $(-1 + \mathrm{i})^{10}$ est situé sur l'axe des ordonnées.

Exercice 8 *Des questions indépendantes*

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -4$, $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}, z_C = 2 - 2i\sqrt{3}$.

a. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Construire A, B et C.

c. Ecrire le quotient $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

d. En déduire la nature du triangle ABC.

2. **a.** Dans le plan complexe placer les points suivants $A(1 + 3i), B(6 + 6i), C(4{,}5 + 5i)$ et $D(10{,}5 - 5i)$.

b. Ecrire le quotient $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle. Que peut-on en déduire ?

c. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

b. Dans le plan complexe, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ et $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$. Donner leur forme exponentielle.

c. Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

d. Dans le plan complexe, on donne les points C et D d'affixes respectives $z_C = -\sqrt{3} + i$ et $z_D = z_C\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Donner la forme algébrique de z_D.

e. Soit E le point d'affixer $z_E = 4\sqrt{3} + 6i$.
Montrer que les points C, D et E sont alignés

f. Montrer que le triangle ACE est équilatéral.

Exercice 9

Soit l'équation $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$: (E).

1. En faisant un changement de variable adapté, résoudre la nouvelle équation.

2. En déduire les solutions de (E).

3. Prouver que les points images dans le plan complexe de ces solutions sont les sommets d'un carré.