Thème : Matrices **RATTRAPAGE**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Exercice 1 *Les deux questions sont indépendantes*

1. Soit une matrice carrée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) vérifiant la relation : $(A - I_n)(A - I_n)^2 = 0_n$.
   Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Montrer que si B une matrice carrée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) inversible vérifie : $B^2 - 3B = 0_n$, alors $B = 3I_n$.

Exercice 2

On considère les trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 2)$ et par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = -3u_n + v_n + 3w_n \,, n \in \mathbb{N} \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A tel que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Calculer PQ. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer $D = QAP$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Calculer la matrice A^n et montrer que $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + (-2)^n & -2^n + (-2)^n & 2^n - (-2)^n \\ (-2)^n - 4^n & (-2)^n + 4^n & -(-2)^n + 4^n \\ 2^n - 4^n & -2^n + 4^n & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$.
6. Déterminer l'expression de la matrice U_n en fonction de n.
7. Etudier la limite de (U_n).

Exercice 3

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres entiers définies par :

$$a_1 = 1,\ b_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 2\,a_n \end{cases}$$

1. Calculer a_2, b_2, a_3 et b_3.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n sont des entiers naturels.

3. *a)* Donner M^2.

b) Démontrer : $M^2 = M + 2\,I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice identité d'ordre 3.

c) Démontrer alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = a_n\, M + b_n\, I$.

Exercice 4

Soit a un réel donné non nul distinct de -1 et 1.

Nous considérons deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0, v_0 et qui satisfont, quel que soit l'entier naturel n, aux relations de récurrence,

$$u_{n+1} = u_n + av_n \text{ et } v_{n+1} = au_n + v_n.$$

Pour tout entier naturel n, nous posons :

$$s_n = u_n + v_n \text{ et } d_n = u_n - v_n.$$

1. Démontrer que les deux suites (s_n) et (d_n) sont géométriques.
En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0, n et a.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Comment déterminer la matrice A^n ?

BONUS !

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A + b_n I_3$$

On précisera les relations de récurrences définissant les suites (a_n) et (b_n).

Barème indicatif **Ex 1 : 2.5** **Ex 2 : 7** **Ex 3 : 6** **Ex 4 : 4.5** **Bonus : 2**