<u>Exercice 1</u> **5.5 points**

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1):\ 4-x^2+(2-x)(3+2x)\geq(1-x)(2-x)$$
$$\Leftrightarrow (2-x)(2+x)+(2-x)(3+2x)-(1-x)(2-x)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2-x)(2+x+3+2x-1+x)\geq 0 \Leftrightarrow (2-x)(4x+4)\geq 0 \ \backslash\mathbf{2}$$

Après avoir établi un tableau de signes, on peut conclure que : $\boxed{S=[-1\,;2]}$ **\1**

$$(I_2):-2+\frac{1}{1-x}\geq\frac{2x}{1-x}\Leftrightarrow\frac{-2+2x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{-1}{1-x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{1-x}\leq 0\ \backslash 1.5$$

Après avoir établi un tableau de signes, on peut conclure que : $\boxed{S=]1\,;\,+\infty[}$ **\1**

<u>Exercice 2</u> *Les questions suivantes sont indépendantes* **7.5 points**

1. Soit les points $A(-1\,;5), B(4\,;\,-4)$ et $D\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$.

a) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{DA}$

Soit $M(x\,;y)$. Alors, on a : $\begin{pmatrix}x+1\\y-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\9\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{13}{2}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=-5-3\\y-5=9+13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\y=27\end{cases}$. Donc

$\boxed{M(-9\,;27)}$ **\1.5**

b) Déterminer les coordonnées du point N tel que ABDN soit un parallélogramme.

Soit $N(x\,;y)$. Alors, on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ND}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-x\\-\frac{3}{2}-y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}5=\frac{1}{2}-x\\-9=-\frac{3}{2}-y\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=\frac{1}{2}-5=-\frac{9}{2}\\y=9-\frac{3}{2}=\frac{15}{2}\end{cases}$. Donc $\boxed{N\left(-\frac{9}{2}\,;\,\frac{15}{2}\right)}$ **\1.5**

c) Déterminer les coordonnées du point H tel que B est le symétrique de H par rapport à D.

Le point D est donc le milieu de [BH]. Soit $H(x\,;y)$. On a donc : $\frac{1}{2}=\frac{4+x}{2}\Leftrightarrow 1=4+x\Leftrightarrow x=-3$.

Et, $-\frac{3}{2}=\frac{-4+y}{2}\Leftrightarrow -3=-4+y\Leftrightarrow y=1$. Soit : $\boxed{H(-3\,;1)}$ **\1**

2. Préciser si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{5}{9}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}-2&-\frac{5}{9}\\6&\frac{5}{3}\end{vmatrix}=-2\times\frac{5}{3}-6\times\left(-\frac{5}{9}\right)=-\frac{10}{3}+\frac{10}{3}=0$ donc <u>les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.</u> **\0.75**

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{5}\\-2\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{5}\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}1-\sqrt{5}&1\\-2\sqrt{5}&1-\sqrt{5}\end{vmatrix}=\left(1-\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}=1-2\sqrt{5}-5+2\sqrt{5}=-4\neq 0$ donc <u>les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.</u> **\0.75**

3. Déterminer l'ensemble des valeurs de x tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}5+2x\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5+2x & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 15+6x-16=0 \Leftrightarrow 6x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$.

$S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$. **\1**

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 5+x \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 5-x \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5+x & 3 \\ 3 & 5-x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 25-x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$.

$S=\{-4;4\}$. **\1**

<u>Exercice 3</u> 7 points

On a placé dans le repère orthonormé ci-après les points suivants :

$A(-4\,;3), B(-2\,;\,-1)$ et $C(4\,;2)$.

Aucune justification graphique ne sera acceptée. On pourra placer les points donnés dans l'énoncé.

1. Déterminer les coordonnées du point I milieu [AC].

$I\left(\frac{-4+4}{2}\,;\frac{3+2}{2}\right)$ soit $\boxed{I\left(0\,;\frac{5}{2}\right)}$ **\1**

2. Déterminer les coordonnées du point D tel que I est le milieu de [BD].

Soit $D(x\,;y)$. Alors, on a : $\begin{cases} 0=\frac{-2+x}{2} \\ \frac{5}{2}=\frac{-1+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ et $y=6$ donc $\boxed{D(2\,;6)}$ **\1.5**

3. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

$AB^2=2^2+4^2=20\,; AC^2=8^2+1^2=65\,; BC^2=6^2+3^2=45$.On constate que : $AB^2+BC^2=AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que <u>le triangle ABC est rectangle en B</u>. **\2**

4. En déduire la nature du quadrilatère ABCD ? *Justifier*

Comme I est le milieu de [AC] mais aussi de [BD], le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent le leur milieu. C'est donc un parallélogramme. De plus, d'après ce qui précède, il y a un angle droit en B. On conclut que <u>ABCD est un rectangle</u>. **0.5**

5. Calculer l'aire du triangle ABC.

$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{20}\times\sqrt{45}}{2}=\frac{2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}}{2}=\boxed{15 \text{ u.a}}$. **\1**

6. Soit le point $H(0\,;10)$. Les droites (CH) et (BA) sont-elles parallèles ? *Justifier*

$\det\left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{BA}\right)=\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}=-4\times 4-8\times(-2)=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires.

On en déduit que les droites (CH) et (BA) sont parallèles. **\1**

On aurait pu voir aussi que $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{BA}$

BONUS !

Soit ABC un triangle tel que $AB=\sqrt{2}-1, AC=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ et $BC=2-\sqrt{2}$.

Déterminer la nature du triangle ABC.